$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

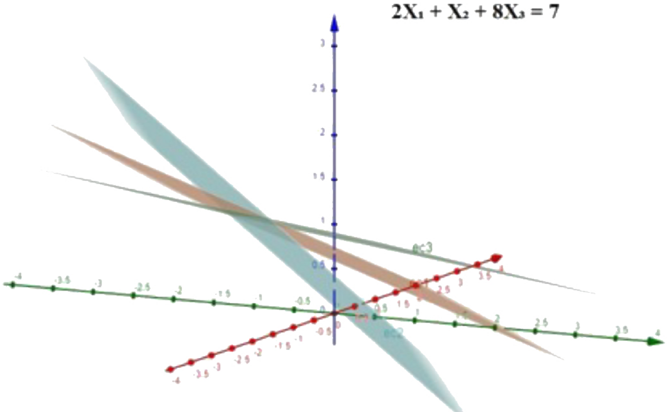
Un primer curso de

Álgebra Lineal

Notas introductorias

Manuel García Álvarez

$$\begin{aligned} 3X_1 + 3X_2 + 9X_3 &= 6 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 &= 1 \\ 2X_1 + X_2 + 8X_3 &= 7 \end{aligned}$$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Xochimilco

División de Ciencias Sociales y Humanidades

Un primer curso de Álgebra Lineal

Los textos presentados en este volumen fueron revisados y dictaminados por pares académicos expertos en el tema y externos a nuestra Universidad, a partir del sistema doble ciego por el Comité editorial de la División de Ciencias Sociales y Humanidades, de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco.

Un primer curso de Álgebra Lineal
Notas introductorias

Primera edición: 7 de agosto de 2022

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco
Calzada del Hueso 1100, Colonia Villa Quietud, Coyoacán,
Ciudad de México. C.P. 04960
Sección de Publicaciones de la División de Ciencias Sociales y Humanidades.
Edificio A, 3er piso. Teléfono 54 83 70 60
pubcsh@gmail.com / pubcsh@correo.xoc.uam.mx
http://dcsh.xoc.uam.mx/repdig
http://www.casadelibrosabiertos.uam.mx/index.php/libroelectronico
http://dcshpublicaciones.xoc.uam.mx

ISBN: 978-607-28-2403-4 (impreso)
ISBN: 978-607-28-2384-6 (digital)
Impreso en México / *Printed in Mexico*

Un primer curso de Álgebra Lineal

Notas introductorias

Manuel García Álvarez

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD XOCHIMILCO División de Ciencias Sociales y Humanidades

Para mi querida esposa y Samuel
Arantxa y Cristóbal

ÍNDICE

CAPÍTULO 2. DETERMINANTES

CAPÍTULO 3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

CAPÍTULO 4. ESPACIOS VECTORIALES

CAPÍTULO 5. TRANSFORMACIONES LINEALES

CAPÍTULO 6. VALORES, VECTORES CARACTERÍSTICOS Y DIAGONALIZACIÓN

PREFACIO

Este libro está basado en los programas propuestos para la carrera de economía en diferentes instituciones públicas y sobre todo en los contenidos programáticos de la carrera de Economía que se imparte en la UAM unidad Xochimilco.

Surgen además, como parte de diferentes propuestas bibliográficas utilizadas a lo largo de los últimos veinte años de docencia y sobre todo del curso de la Maestría de Economía de la UNAM, en la cual, mi asesor de tesis el Dr. Martín Puchet Anyul y el profesor Horacio Catalán, me adentraron en estos temas.

Sin duda, que las notas y las clases de esa época han sido parte trascendental para proponer la forma y estructura de los contenidos propuestos. Dicho sea de paso, he pensado no sólo como docente sino también como alumno, con todo el sesgo que esto conlleva, que ésta es la mejor estructura de contenidos para acercar los temas e ir articulando conceptualmente cada unidad temática. Al mismo tiempo, las definiciones, conceptos y teoremas que integran los capítulos, posibilitan resolver diferentes ejercicios con grados de dificultad creciente y posibilitan a los estudiantes normalizar un lenguaje natural de un curso introductorio de álgebra lineal.

El objetivo principal del libro es capacitar al estudiante para comprender, formular y resolver ejercicios correspondientes al campo del álgebra lineal, de manera que al cursar diferentes unidades de enseñanza, les permita con mayor soltura comprender y aplicar los temas del álgebra lineal a cada una de las problemáticas.

Sin duda, este libro puede ser utilizado en diferentes ciencias con mayor o menor profundidad, para ello, serán indispensables las aplicaciones a la economía, la administración, la política y la gestión social, sociología, o cualquier otra ciencia que requiera el aprendizaje de estos temas. Pero sobre todo de las aplicaciones que cada profesor pueda ofrecer a sus estudiantes.

La idea de presentar los temas a partir de su forma general, tiene la finalidad de permitir que las aplicaciones sean abordadas por cada área del conocimiento y profesorado de la manera más adecuada para cumplir con sus objetivos, es decir, es una forma de generalizar y entender los temas que tendrán aplicación e interpretación para cada disciplina sin dejar de lado, que en la aplicaciónse asumen conceptos y soltura para la resolución de los problemas.

Este material ha sido presentado a los estudiantes de la carrera de Economía y sobra decir que con sus comentarios en clase y fuera de ella han mejorado y aportado ejercicios que se han incluido para que sea más sencillo y comprensible el texto.

El libro está pensado para que pueda ser utilizado en un curso que inicie con el capítulo de matrices y termine con el capítulo de diagonalización, o bien, como un texto que presente de manera independiente cada tema y subtema del contenido general.

Deseo este libro cumpla su objetivo y agradezco a cada una de las personas que intervinieron a lo largo del proceso hasta esta su primera presentación, iniciaré con Elvia Angélica y Danae Syboney de la Facultad de Economía de la UNAM y en estos días de pandemia a Yazmín Abigal de la UAM Xochimilco. También a mi gran amigo Eduardo por siempre escuchar mis proyectos e incentivarme a llevarlos a cabo. Lui, gracias por motivarme a la presentación de esta primera edición del libro.

Mi más grande agradecimiento por la amistad, revisión, corrección e ideas de Alexis Ayala y Gerardo Trejo para la elaboración de estas simples notas de clase, durante nuestros cursos en la Facultad de Economía de la UNAM y en la UAM Xochimilco, en los últimos cinco años; así como a la Dra. Martha Elena Márquez por la revisión del texto. Y sobre todo, a cada uno de los alumnos que formaron parte de las clases impartidas con este material y que coadyuvaron a mejorar el contenido.

Termino diciendo que este libro es resultado de la paciencia y tiempo que me ha dedicado mi asesor de tesis Doctoral, el Dr. Martín Puchet Anyul, en estos temas y particularmente agradezco estos más de veinte años de amistad.

Ciudad de México

CAPÍTULO 1

MATRICES

"Las matemáticas son la música de la razón"
James Joseph Sylvester

Antecedentes

El concepto de matriz y determinante tiene sus inicios en el siglo II a.C, aunque hay ideas desde el siglo IV a.C. Sin embargo, no fue hasta finales del siglo XVII que las ideas reaparecieron y fueron madurando.

El uso de matrices y determinantes surgen del estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Los babilonios estudiaron problemas que conducen a ecuaciones lineales simultáneas como la tableta de arcilla que data de alrededor del 300 a.C.

También los chinos entre los 200 a.C. y 100 a.C., se aproximaron más a la definición de matriz de los babilonios. De hecho, en el texto "Nueve capítulos sobre el arte matemático" escrito durante la dinastía Han presenta el primer ejemplo conocido de métodos matriciales, el cual es similar al ejemplo babilónico.

Para finales de los años 20 los métodos propuestos establecían que se tendrían que escribir las ecuaciones lineales como las filas de la matriz en lugar de las columnas, pero por supuesto, el método es idéntico.

Muchos resultados estándar de la teoría de matrices elementales aparecieron por primera vez mucho antes de que las matrices fueran objeto de investigación matemática. Por ejemplo, de Witt en "Elementos de curvas", publicado como parte de los comentarios sobre la versión latina de 1660 de la "Géométrie" de Descartes, mostraba cómo una transformación de los ejes reduce una ecuación dada para una forma cónica a canónica. Esto equivale a diagonalizar una matriz simétrica, pero De Witt nunca pensó en estos términos.

En 1826, Cauchy, en el contexto de formas cuadráticas en n variables, usó el término 'cuadro' para la matriz de coeficientes, también introdujo la idea de matrices similares (pero no el término) y mostró que si dos matrices son similares tienen la misma ecuación característica. También, de nuevo en el contexto de las formas cuadráticas, demostró que toda matriz simétrica real es diagonalizable.

El primero en usar el término 'matriz' fue Sylvester en 1850. Sylvester definió una matriz como una disposición de términos alargada y la vio como algo que llevó a varios determinantes a partir de matrices cuadradas contenidas en ella.

En 1858 publicó "Memorias sobre la teoría de matrices" el cual contiene la primera definición abstracta de una matriz. Mostró que las matrices de coeficientes estudiadas anteriormente para formas cuadráticas y para transformaciones lineales son casos especiales de su concepto general. Cayley dio un álgebra matricial que define la suma, la multiplicación, la multiplicación escalar y los inversos. Construyó de forma explícita el inverso de una matriz en términos del determinante de la matriz. Asimismo, demostró que, en el caso de matrices 2×2, una matriz satisface su propia ecuación característica. Declaró que había comprobado el resultado para matrices 3×3.

El que una matriz satisfaga su propia ecuación característica se llama teorema de *Cayley-Hamilton*, quien probó un caso especial del teorema, el caso 4×4, en el curso de sus investigaciones sobre los cuaterniones. En 1896, Frobenius se dio cuenta de la "Memoria" de 1858 de Cayley sobre la teoría de las matrices y después de esto comenzó a usar el término matriz.

Finamente, Weierstrass utilizó una definición axiomática de un determinante en sus conferencias y, después de su muerte, se publicó en 1903 en la nota "Sobre la teoría de los determinantes". En el mismo año, también se publicaron las conferencias de Kronecker sobre los determinantes, nuevamente después de su muerte. Con estas dos publicaciones, la teoría moderna de los determinantes estaba en su lugar, pero la teoría matricial tardó un poco más en convertirse en una teoría plenamente aceptada. Un texto inicial importante que llevó las matrices a su lugar adecuado dentro de las matemáticas fue "Introducción al álgebra superior" por Bôcher en 1907. Turnbull y Aitken escribieron textos influyentes en los años 1930 y Mirsky, en una "Introducción al álgebra lineal" en 1955, la teoría matricial alcanzó su actual papel principal como uno de los temas de matemáticas más importantes para los estudiantes universitarios.

1.1 Concepto y orden de una matriz

Una *matriz* es un conjunto de números arreglados de forma rectangular, llamados elementos de la matriz. Este arreglo puede estar entre paréntesis rectangulares o paréntesis angulares. Nosotros utilizaremos los paréntesis rectangulares. Las matrices las representaremos por las letras mayúsculas de nuestro alfabeto.

Al conjunto de las matrices se les representa con el símbolo M_{mxn} donde m indica el número de renglones y n el número de columnas de las matrices que pertenecen a tal conjunto. El símbolo mxn nos indica el tamaño o el *orden* de una matriz en términos de su número de renglones y columnas.

En caso de que los elementos de una matriz A no se especifiquen en forma explícita o numérica, serán especificados por el término general a_{ij} que representa el elemento de la matriz A ubicado en el renglón i-ésimo y la columna j-ésima de A. La notación abreviada para una matriz A con m renglones y n columnas es la siguiente,

$$A_{m\times n} = (a_{ij})$$

que se representa en el siguiente arreglo:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Matrices Cuadradas y diagonal principal

Son matrices cuadradas aquellas donde el número de renglones es igual al número de columnas, es decir, $m = n$. La forma general de una matriz cuadrada es la siguiente:

$$A_{n\times n} = A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz cuadrada se puede representar como A_n.

Definimos la *diagonal principal* de una matriz cuadrada como la línea diagonal en la matriz A que va de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$; de manera simplificada podemos definirla como: $\{\boldsymbol{a_{ij}} | \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\}$, que de forma matricial se observa en la matriz siguiente (remarcada en negro).

$$A_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

1.3 Traza

La *traza* de la matriz A, representada por $Tr(A)$ es la suma de los elementos de la diagonal principal de A_n, dada por:

$$\boldsymbol{Tr(A_n) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots\ldots + a_{nn}}$$

Ejemplo 1. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 9 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Encuentre su traza

$$Tr\,(A) = 3 + 5 + 4 = 12$$

1.4 Operaciones con Matrices

1.4.1 Igualdad de matrices

Si $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ son dos matrices del mismo orden, se dice que son *iguales,* si sus elementos correspondientes son iguales, esto es:

$$A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

$$Sean\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, y\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, A = B, si

$$\begin{matrix} a_{11} = b_{11} & a_{12} = b_{12} & \dots & a_{1n} = b_{1n} \\ a_{21} = b_{21} & a_{22} = b_{22} & \dots & a_{2n} = b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} = b_{m1} & a_{m2} = b_{m2} & \dots & a_{mn} = b_{mn} \end{matrix}$$

1.4.2 Producto de una matriz por un escalar

Definición de producto escalar. Dada una matriz A de orden $m \times n$ y k un escalar, el producto de k por A se obtiene multiplicando el escalar k por cada uno de los elementos de la matriz A.

Definición de escalar. Un escalar es una magnitud que quedan totalmente determinada por un sólo número real, una unidad de medida o magnitud, pero no dirección.

$$kA = k\,[a_{ij}] = [ka_{ij}], \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ y } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ejemplo 2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \text{ encuentre } 2A$$

Solución

$$2A = 2\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \\ 4 & -12 & 10 \end{bmatrix}$$

1.4.3 Suma de Matrices

Definición de suma de matrices. Sean A y B dos matrices del mismo orden, la suma de $A + B$ es la matriz C, que se obtiene de sumar los elementos correspondientes de A y B, queda representado como:

$$Sean\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, y\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

De lo cual, se deriva

$$\boldsymbol{A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = Sean\ A}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Es importante hacer notar que matrices de orden diferente no se pueden sumar.

Ejemplo 3. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Encuentre **A + B**

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

encuentre **2A + 3B + C**

$$2A + 3B + C = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & -10 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & -3 \\ -6 & -12 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 9 & 6 & -18 \\ -18 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

1.4.4 Resta de matrices

Definición. Sean *A* y *B* dos matrices del mismo orden, La resta de *A-B* es la matriz *C* que se obtiene de restar a los elementos de *A*, a los elementos correspondientes de *B* y se define como $A - B = A + (-B) = A + (-1)\,B$.

$$Sean\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, y\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Lo que se deriva como

$$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5. Dadas las matrices *A* y *B* del ejemplo 3, encuentre *A – B*

Solución

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -7 & 7 & -8 \\ 5 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6. Considere las matrices *A, B, C* del ejemplo 4, encuentre $2A - 3B + C$

Solución

$$2A - 3B + C = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & -10 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -6 & -9 \\ -3 & -9 & 3 \\ 6 & 12 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -12 & 0 \\ 3 & -12 & -12 \\ -6 & 24 & 15 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 7. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -6 & 10 & -4 \\ -8 & 6 & -4 \end{bmatrix} y\ C = \begin{bmatrix} 2\alpha & 7\beta \\ 3\delta & 4\varepsilon \\ 2\eta & 2\theta \end{bmatrix}$$

Si 2A + 4B – C = 0, encuentre la matriz C

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \\ 8 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$4B = 4\begin{bmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -6 & 10 & -4 \\ -8 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 20 & -20 \\ -24 & 40 & -16 \\ -32 & 24 & -16 \end{bmatrix}$$

como $2A + 4B - C=0$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \\ 8 & -8 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 20 & -20 \\ -24 & 40 & -16 \\ -32 & 24 & -16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\alpha & 7\beta & 2\gamma \\ 3\delta & 4\varepsilon & 2\zeta \\ 2\eta & 2\theta & 3\iota \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (14-2\alpha) & (14-7\beta) & (-14-2\gamma) \\ (-18-3\delta) & (44-4\varepsilon) & (-12-2\zeta) \\ (-24-2\eta) & (16-2\theta) & (-18-3\iota) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} 14-2\alpha=0 & 14-7\beta=0 & -14-2\gamma=0 \\ -18-3\delta=0 & 44-4\varepsilon=0 & -12-2\zeta=0 \\ -24-2\eta=0 & 16-2\theta=0 & -18-3\iota=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2\alpha=14 & 7\beta=14 & 2\gamma=-14 \\ 3\delta=-18 & 4\varepsilon=44 & 2\zeta=-12 \\ -2\eta=-24 & 2\theta=16 & 3\iota=-18 \end{array}$$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} 14 & 14 & -14 \\ -18 & 44 & -12 \\ -24 & 16 & -18 \end{bmatrix}$$

1.4.5 Producto de matrices

Para que el producto de la matriz *A* con la matriz *B* exista, se debe cumplir que el número de las columnas de *A* sea igual al número de renglones de *B*. Otra forma de determinar si el producto está definido consiste en poner el orden de las matrices y si los números interiores son iguales entonces el producto existe, como se presenta a continuación:

$$\boldsymbol{A_{m\times k}\, B_{k\times n} = D_{m\times n}}$$

Se puede ver que los números interiores *k* son iguales.

El producto de la matriz *A* con la matriz B una vez que se comprobó que está definido, se efectúa multiplicando los renglones de A por las columnas de B, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{D_{m\times n} = AB = a_{ij}\, b_{ij} = d_{ij},}$$

en donde

$$d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

para toda $i=1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$

de forma más explícita, se presenta a continuación:

$$Sean\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & a_{ik} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}, y\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kj} & b_{kn} \end{bmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \dots & \boldsymbol{a_{ik}} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \boldsymbol{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \boldsymbol{b_{2j}} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \dots \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & \boldsymbol{b_{kj}} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix}$$

Obteniéndose la fórmula

$$d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Como se ve el renglón y columna remarcadas.

Ejemplo 8. Dadas las matrices

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ encuentre $A \times B = (A)B$.

Solución

Como el número de columnas de *A* es igual al número de renglones de *B* el producto existe y lo efectuamos de la manera siguiente:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1-2-6) & (2-6-12) & (3+2-9) & (1+2+6) \\ (-2-2+2) & (4-6+4) & (6+2+3) & (2+2-2) \\ (0+1-4) & (0+3-8) & (0-1-6) & (0-1+4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -16 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & 11 & 2 \\ -3 & -5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre *2AC – 4AB+3BC*.

Solución

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4+2+9) & (1+1+3) & (2+0+3) \\ (8-6+6) & (2-3+2) & (4+0+2) \\ (-4+4-3) & (-1+2-1) & (-2+0-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 8 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2AC = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 16 & 2 & 12 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2-3+3) & (1-1+3) & (-1+3-6) \\ (4+9+2) & (2+3+2) & (-2-9-4) \\ (-2-6-1) & (-1-2-1) & (1+6+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 15 & 7 & -15 \\ -9 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-4AB = \begin{bmatrix} -8 & -12 & 16 \\ -60 & -28 & 60 \\ 36 & 16 & -36 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (8-2-3) & (2-1-1) & (4+0-1) \\ (12-2-9) & (3-1-3) & (6+0-3) \\ (4-2-6) & (1-1-2) & (2+0-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3BC = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & 9 \\ -12 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2AC - 4AB + 3BC$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 16 & 2 & 12 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -12 & 16 \\ -60 & -28 & 60 \\ 36 & 16 & -36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & 9 \\ -12 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & -2 & 35 \\ -41 & -29 & 81 \\ 18 & 10 & -42 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 6 & 8 & 10 \\ -4 & -7 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Encuentre $2A^2 - 3AB + \mathrm{BC} - 5B$

Solución

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 6 & 8 & 10 \\ -4 & -7 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 6 & 8 & 10 \\ -4 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (9-24+20) & (-12-32+35) & (-15-40+45) \\ (18+48-40) & (-24+64-70) & (-30+80-90) \\ (-12-42+36) & (16-56+63) & (20-70+81) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -10 \\ 26 & -30 & -40 \\ -18 & 23 & 31 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 = 2\begin{bmatrix} 5 & -9 & -10 \\ 26 & -30 & -40 \\ -18 & 23 & 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -18 & -20 \\ 52 & -60 & -80 \\ -36 & 46 & 62 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 6 & 8 & 10 \\ -4 & -7 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3-4-5) & (6-12-5) & (12-4-25) \\ (6+8+10) & (12+24+10) & (24+8+50) \\ (-4-7-9) & (-8-21-9) & (-16-7-45) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -17 \\ 24 & 46 & 82 \\ -20 & -38 & -68 \end{bmatrix}$$

$$-3AB = -3\begin{bmatrix} -6 & -11 & -17 \\ 24 & 46 & 82 \\ -20 & -38 & -68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 33 & 51 \\ -72 & -138 & -246 \\ 60 & 114 & 204 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+2+28) & (-4+10+8) & (3-12+12) \\ (2+3+7) & (-4+15+2) & (3-18+3) \\ (2+1+35) & (-4+55+10) & (3-6+15) \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 32 & 14 & 3 \\ 12 & 13 & -12 \\ 38 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$-5B = -5\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & -20 \\ -5 & -15 & -5 \\ -5 & -5 & -25 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 - 3AB + BC + 5B$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -18 & -20 \\ 52 & -60 & -80 \\ -36 & 46 & 62 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 33 & 51 \\ -72 & -138 & -246 \\ 60 & 114 & 204 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 32 & 14 & 3 \\ 12 & 13 & -12 \\ 38 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -5 & -10 & -20 \\ -5 & -15 & -5 \\ -5 & -5 & -25 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 - 3AB + BC - 5B = \begin{bmatrix} 55 & 19 & 14 \\ -13 & -200 & -343 \\ 57 & 166 & 253 \end{bmatrix}$$

1.5 Matriz renglón

Una matriz que tiene un solo renglón y n columnas *(1 x n)* se llama *matriz renglón*.

$$A = [a_{11} \ \ a_{12} \cdots a_{1n}]$$

Ejemplo 11.

$$A = [1 - 8 \quad 5 \quad 7]$$

1.6 Matriz columna

Una *matriz columna* es aquella que contiene m renglones y una columna *(m x 1)*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 12.

$$A = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

1.7 Matriz nula

Una *matriz nula o cero*, es aquella cuya totalidad de elementos es cero.

Ejemplo 13.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1.8 Matriz triangular superior

Se llama *matriz triangular superior* a una matriz cuadrada que debajo de la diagonal principal tiene solamente ceros. Que se denota por $\boldsymbol{a_{ij} = 0\ para\ i > j}$.

Ejemplo 14.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.9 Matriz triangular inferior

Una *matriz triangular inferior* es una matriz cuadrada que arriba de la diagonal principal tiene solamente ceros. Que se denota por $\boldsymbol{a_{ij} = 0\ para\ i < j}$.

Ejemplo 15.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

1.10 Matriz diagonal

Una matriz es diagonal si es triangular superior y triangular inferior simultáneamente. La siguiente matriz cumple con estas condiciones

$$D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

en donde se puede ver que sus elementos $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$

Ejemplo 16.

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1.11 Matriz escalar

Si en una matriz diagonal los elementos a_{ii} son iguales a un escalar o número real k para toda i, es decir, $a_{ii} = k_i$ para toda $i = 1,2,3, ...,$ donde si $k_1 = k_2 = ...= k_n = k,$ entonces la matriz resultante es llamada *matriz escalar*, de la siguiente forma $a_{ij}=\{k \text{ para } i = j \text{ y } 0 \text{ para } i \neq j\}.$

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Ejemplo 17.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1.12 Matriz identidad

Si en una matriz escalar $k = 1$, la matriz resultante es llamada *matriz identidad* y se le denota por I. Denotada por:

$$I = [\delta_{ij}]\ con\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ i = j \\ 0\ si\ i \neq j \end{cases}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 18. Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5I$, encuentre $f(A)$, si

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

$$F(A) = 2A^3 - 3A^2 + 4A - 5I$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-6-15) & (-2+2-3) & (-3-4+9) \\ (3-3+10) & (-6+1+2) & (-9-2-6) \\ (5+3-15) & (-10-1-3) & (-15+2+9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -3 & 2 \\ 10 & -3 & -17 \\ -7 & -14 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-3A^2 = \begin{bmatrix} 60 & 9 & -6 \\ -30 & 9 & 51 \\ 21 & 42 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -20 & -3 & 2 \\ 10 & -3 & -17 \\ -7 & -14 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (20+20-21) & (3-6-42) & (-2-34-12) \\ (60+10+14) & (9-3+28) & (-6-17+8) \\ (100-10-21) & (15+3-42) & (-10+17-12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -45 & -48 \\ 84 & 34 & -15 \\ 69 & -24 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2A^3 = 2\begin{bmatrix} 19 & -45 & -48 \\ 84 & 34 & -15 \\ 69 & -24 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & -90 & -96 \\ 168 & 68 & -30 \\ 138 & -48 & -10 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 12 \\ -12 & 4 & -8 \\ -20 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$-5I = -5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$F(A) = \begin{bmatrix} 38 & -90 & -96 \\ 168 & 68 & -30 \\ 138 & -48 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 & 9 & -6 \\ -30 & 9 & 51 \\ 21 & 42 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 & 12 \\ -12 & 4 & -8 \\ -20 & -4 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 89 & -73 & -90 \\ 126 & 76 & 13 \\ 139 & -10 & 9 \end{bmatrix}$$

1.13 Matrices elementales

Las *matrices elementales* son aquellas matrices cuadradas que se pueden obtener a partir de una matriz que en su diagonal principal contiene unos y el resto de los elementos en la matriz son cero, mediante una sola operaci6n elemental en los renglones.

Ejemplo 19.

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \textit{se suma menos siete veces} \\ \textit{el renglón uno al renglón tres} \end{bmatrix}$$

$$b)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \textit{se intercambia el segundo renglón} \\ \textit{con el tercer renglón} \end{bmatrix}$$

1.14 Matriz transpuesta

La *matriz transpuesta* resulta de intercambiar los renglones por columnas de una matriz dada *A*, es llamada la matriz transpuesta de A y se denota por A^t.

Ejemplo 20. Dada la matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -9 & 8 \end{bmatrix}$ encuentre A^t

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -7 & -2 & -9 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

1.15 Matriz simétrica

Una *matriz simétrica*, es una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ que es igual a su transpuesta, tal que $a_{ij} = a_{ji}$.

Para una matriz simétrica *A*, se cumple que $A = A^t$

Una matriz simétrica *B* se puede obtener a partir de la matriz *A*, si cumple con la relación $B = A + A^t$.

Ejemplo 21. Dada la matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ encuentre una matriz simétrica.

Solución

$$B = A + A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica como se comprueba a continuación:

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 8\\ 1 & -8 & 0\\ 8 & 0 & 10\end{bmatrix} y\ B^t=B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 8\\ 1 & -8 & 0\\ 8 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se cumple que $B = B^t$

1.16 Matriz antisimétrica

Una *matriz antisimétrica* es una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ que es igual a menos su transpuesta, tal que $a_{ij} = -a_{ji}$.

Para una matriz antisimétrica A, se cumple que $A = -A^t$.

Una matriz antisimétrica B se puede obtener a partir de la matriz A, con la relación $B = A - A^t$

Ejemplo 22. Dada la matriz

$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & -4 & 1\\ 5 & -1 & 5\end{bmatrix}$ encuentre una matriz antisimétrica.

Solución

$$B=A-A^t=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & -4 & 1\\ 5 & -1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -2 & -4 & -1\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -5 & -2\\ 5 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & -5 & -2\\ 5 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$B^t=\begin{bmatrix}0 & 5 & 2\\ -5 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & -5 & -2\\ 5 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

Por lo tanto $B = -B^t$ y se comprueba que la matriz B es antisimétrica.

1.17 Propiedades de las matrices

Sean las matrices A, B, C, de forma tal que las operaciones indicadas se puedan realizar *y* sean *k, r* escalares, entonces se pueden establecer las siguientes propiedades del álgebra de matrices:

$A + B = B + A$	*Propiedad conmutativa*
$A(B + C) = AB + AC$	*Propiedad distributiva*
$(B + C)A = BA + CA$	*Propiedad distributiva para la suma*
$A(B - C) = AB - AC = (B - C)A = BA - CA$	*Propiedad distributiva*
$A + (B + C) = (A + B) + C$	*Propiedad asociativa para la suma*
$A(BC) = (AB)C$	*Propiedad asociativa para el producto*
$A + (-A) = 0$	*Propiedad recíproco o inverso aditivo*
$IA = A$	*Propiedad de la matriz identidad*
$1A = A1 = A$	*Propiedad de la matriz identidad*
$kA = Ak$	*Producto escalar*

La resta de matrices *no* es *conmutativa*, es decir, $A - B \neq B - A$

La conmutatividad para el producto de matrices por lo general no se cumple; ya que existen matrices A *y* B tales que: $AB \neq BA$.

Se deja al alumno comprobar las propiedades propuestas con matrices no cuadradas.

1.18 Operaciones elementales sobre los renglones de una matriz

Las operaciones que se realizan en una matriz son las siguientes:

1. Se puede multiplicar un renglón por un escalar diferente de cero
2. Se pueden intercambiar dos renglones
3. Se puede sumar un múltiplo de un renglón a otro.

1.19 Matriz escalonada

Una matriz A se dice que está en su *forma escalonada* si es una matriz triangular como se verifica en la siguiente matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedades

1. En la matriz *A*, arriba de cada escalón debes encontrar un uno, los cuales llamaremos *pivotes* (uno principal), debajo de cada pivote se encuentran solamente ceros.
2. También se puede observar que en dos renglones sucesivos el pivote del renglón de arriba está a la izquierda del pivote del renglón de abajo.
3. Cualquier renglón que conste de ceros exclusivamente se colocará en la parte inferior de la matriz.
4. Si arriba *y* abajo de los pivotes todos los elementos son ceros entonces decimos que la matriz A fue llevada a su forma escalonada reducida.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

El proceso para llevar un matriz a su *forma escalonada* es conocido como el *proceso de Gauss* y el proceso para llevarla a su *forma escalonada reducida* se le llama el proceso de *Gauss-Jordan*.

Este proceso de escalonamiento se realiza con las operaciones elementales, por ello, es importante establecer un método para obtenerlo. Al realizar una operación entre renglones el último renglón que se presenta en la operación, es el que se transforma, es decir, si indicamos la operación $2R_1 + R_2$ el renglón que cambia es R_2, el renglón R_1 no se modifica, al renglón R_1 le llamaremos *renglón pivotal* y al uno principal de este renglón le llamamos como se mencionó antes *pivote*.

Se presenta a continuación el proceso de escalonamiento a detalle.

Ejemplo 24. Dada la siguiente matriz

$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & -5 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ llevarla a su forma escalonada.

Solución:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & -5 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\textit{se sumó el renglón uno}\\ \textit{al renglón dos}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_1+R_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\textit{se sumó el renglón}\\ \textit{uno al renglón tres}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\textit{Se multiplicó el renglón}\\ \textit{dos por menos un medio}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{(-2)R_2+R_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\textit{Se multiplicó el renglón}\\ \textit{dos por menos dos y se}\\ \textit{sumó al renglón tres}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{4}R_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\textit{se multiplico el renglón tres}\\ \textit{por un cuarto}\end{bmatrix}$$

Se puede observar que la última matriz está ya en su *forma escalonada*.

A continuación, llevaremos ahora esta matriz a su forma escalonada reducida

$$\underset{\sim}{-3R_2+R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\textit{Se multiplicó menos tres veces el renglón}\\ \textit{dos y se sumó al renglón uno}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-\frac{1}{2}R_3+R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\textit{Se multiplicó menos un medio el renglón}\\ \textit{tres y se sumó al renglón uno}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{2}R_3+R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\textit{Se multiplicó un medio el renglón}\\ \textit{tres y se sumó al renglón dos}\end{bmatrix}$$

Se observa que la propiedad cuatro se cumple, por lo tanto, la matriz ya esta en su forma escalonada reducida.

1.20 Rango de una matriz

Sea una matriz A, si esta matriz es llevada a su forma escalonada, los renglones diferentes de cero definen el *rango de la matriz* y éste será igual al número de renglones diferentes de cero.

También el rango de una matriz es el mayor de los órdenes de los menores no nulos que podemos encontrar en la matriz. Por tanto, el rango no puede ser mayor al número de filas o de columnas.

Ejemplo 25. Calculemos el rango de la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 5 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

Solución.

En el primer paso usamos como pivote el elemento a_{11}:

$$\begin{array}{l} 4R_1+R_2 \\ 5R_1+R_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La última matriz de *A*, muestra en cada renglón no nulo hay una entrada no nula tal que todas las entradas por debajo de ésta (en la misma columna) son cero. El rango de *B*, decimos es incompleto, e igual el número de sus renglones no nulos: $r(B) = 2$.

1.21 Matriz inversa

Una matriz cuadrada *A*, tiene inversa si existe A^{-1} cumpliéndose que,

$$A^{-1} A = AA^{-1} = I$$

Donde A^{-1} es la matriz inversa de la matriz *A*.

Propiedades de la matriz inversa (A^{-1})

1. La inversa de una matriz invertible es *única*
2. Si *A* y *B* son invertibles *AB* es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. Si *A* es una matriz cuadrada y *k* es un entero positivo, entonces, $A^k = A\ A\ A....A$, con *k* factores.
4. Si A^{-1} existe, entonces $A^{-n} = A^{-1} A^{-1} A^{-1} ...... A^{-1}$, con *k* factores
5. $(A^{-1})^{-1} = A$
6. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}\ con\ k \neq 0\ \in R$

La utilidad de las matrices elementales y la técnica de eliminación de *Gauss-Jordan* proporcionan un método general para calcular la matriz inversa de una matriz invertible.

Método

1) Coloque la matriz A con la matriz identidad I del mismo orden de A como se ve a continuación y la llamaremos matriz ampliada

$$[A \mid I]$$

2) Realizar operaciones elementales en los renglones de la matriz ampliada, utilizando el método de Gauss-Jordan; de tal forma que en donde está A quede la identidad I y en donde está I quedará una matriz que llamaremos matriz inversa (A^{-1}) esto es,

$$[I \mid A^{-1}]$$

Si en el proceso de eliminación, resulta un renglón compuesto exclusivamente de ceros, entonces la matriz A no tiene inversa y se detiene el proceso.

1.22 MATRIZ SINGULAR

Definición de matriz singular. Una matriz A se denomina singular si no tiene inversa.

Ejemplo 26. Dada la matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$; encuentre su matriz inversa, si es que existe.

Solución

Para encontrar la inversa de A, se le adjunta la matriz identidad I, esto es $[A \mid I]$, se encuentra su matriz escalonada reducida, de tal forma que en donde está A se obtendrá la identidad I y en donde está I obtendremos la matriz inversa (A^{-1})

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(-4)R_1 + R_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(-1)R_1 + R_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & -10 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$(-1)R_2$$

$$\underset{\sim}{-R_2} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & -10 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$3R_2 + R_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & -10 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$(-11)R_2 + R_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & 1 & 11 \end{array}\right]$$

$$R_3 + R_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & 1 & 11 \end{array}\right]$$

$$R_3 + R_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & 1 & 11 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 1 & 8 \\ -14 & 1 & 10 \\ -15 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Comprobamos que $AA^{-1}=I$

$$AA^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 1 & 8 \\ -14 & 1 & 10 \\ -15 & 1 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-11+42-30) & (1-3+2) & (8-30+22) \\ (-44+14+30) & (4-1-2) & (32-10-20) \\ (-11+56-45) & (1-4+3) & (8-40+33 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 27. Dada la matriz

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, encuentre su inversa si ésta existe.

Solución

$$[A \mid I]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} 2R_1 + R_2 \\ \\ R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -R_2 + R_3 \\ \\ -R_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -R_2 + R_3 \\ \\ -R_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Como un renglón se hace cero, la matriz A no tiene inversa. La matriz A al no tener inversa es una *matriz singular.*

Ejercicios propuestos

1. Escriba un ejemplo de una matriz de orden 2x2 que cumpla con las siguientes condiciones:

   a) Antisimétrica.

   b) Triangular inferior, no diagonal.

   c) Simétrica y escalar.

   d) Simétrica, escalar y no diagonal.

   e) Triangular inferior y escalar.

2) Dadas las matrices A_{3x4}; B_{4x4}; C_{3x3}; D_{4x5}; E_{3x1}; F_{2x4}; sin hacer uso de la forma desplegada, determine cuáles de las siguientes operaciones están definidas. En el caso de que la operación esté definida indique el orden de la matriz resultante.

3) Obtenga la matriz inversa de B utilizando el método de Gauss-Jordan

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Dada la matriz

$$Z=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

se pide lo siguiente:

a. Calcule Z^{-1}

b. Calcule la expresión $Z^2 - 5Z + 2I$

Encuentre los valores de t, para los cuales la matriz A no tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} t & 2 & 3 \\ t & t & 1 \\ t & t & t-3 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 2

DETERMINANTES

"Se vería que mis convicciones son el resultado,
no de prejuicios de nacimiento,
sino de un examen profundo".
AUGUSTIN LOUIS CAUCHY

ANTECEDENTES[1]

No es sorprendente que los comienzos de matrices y determinantes surjan a través del estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Cardano, en "Ars Magna" (1545), da una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que llama "regula de modo" y que llama "madre de reglas". Esta regla resuelve como la regla de Cramer un sistema cuadrado de orden dos, pero no alcanza la definición de un determinante; de cualquier manera su método lleva a la definición.

La idea de un determinante se conoce inicialmente en Japón antes de que se conociera en el continente europeo. En 1683, Seki escribió el "Método" de resolver los problemas que contienen métodos matriciales escritos en tablas exactamente de la manera en que se construyeron los métodos chinos. Sin tener ninguna palabra que corresponda a "determinante", Seki introdujo determinantes y dio métodos generales para calcularlos basándose en ejemplos. Utilizando sus "determinantes", pudo encontrar determinantes de matrices cuadradas de orden dos a cinco.

1 Véase De Gracia, R., y Santos, J. (2019).

Una década después se conoce en Europa el concepto de determinante en la carta que Leibniz escribió a de l'Hôpital. Estaba convencido de que la buena notación matemática era la clave para el progreso, por lo que experimentó con diferentes notaciones para los sistemas de coeficientes. Sus manuscritos no publicados contienen más de 50 formas diferentes de escribir sistemas de coeficientes en los que trabajó durante un período de 50 años a partir de 1678. Sólo dos publicaciones (1700 y 1710) contienen resultados sobre sistemas de coeficientes y utilizan la misma notación que en su carta a de l'Hôpital.

Leibniz usó la palabra "resultante" para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante. Probó varios resultados sobre los resultados, incluida la regla de Cramer. También sabía que un determinante podía expandirse usando cualquier columna, lo que hoy se conoce como la expansión de Laplace. Además de estudiar los sistemas de coeficientes de ecuaciones que lo llevaron al cálculo de los determinantes, también estudió los sistemas de coeficientes de formas cuadráticas que condujeron naturalmente hacia la teoría de matrices.

En la década de 1730, Maclaurin escribió el "Tratado de Álgebra", aunque no se publicó hasta 1748, dos años después de su muerte. Éste, contiene los primeros resultados publicados sobre determinantes que prueban la regla de Cramer para sistemas cuadrados de orden dos y tres, e indican cómo funcionaría el caso de matrices cuadradas de orden 4. Cramer estableció la regla general para los sistemas de orden n, en el artículo "Introducción al análisis de curvas algebraicas" (1750).

Cramer explicó con precisión cómo se calculan estos términos como productos de ciertos coeficientes en las ecuaciones y cómo se determina el signo. También explica cómo los n numeradores de las fracciones se pueden encontrar al reemplazar ciertos coeficientes en este cálculo por términos constantes del sistema.

El trabajo sobre los determinantes ahora comenzó a aparecer regularmente. En 1764, Bezout dio métodos para calcular los determinantes, como lo hizo Vandermonde en 1771. En 1772, Laplace afirmó que los métodos introducidos por Cramer y Bezout no eran prácticos y, en un artículo en el que estudió las órbitas de los planetas internos, analizó la solución de los sistemas de ecuaciones lineales sin realmente calcularlas, mediante el uso de determinantes. Sorprendentemente, Laplace usó la palabra "resultante" para lo que ahora llamamos el determinante: sorprendente, ya que es la misma palabra utilizada por Leibniz, sin embargo, Laplace debe haber desconocido el trabajo de Leibniz. Laplace desarrolló la expansión de un determinante, que ahora lleva su nombre.

Lagrange, en un artículo de 1773, estudió las identidades de los determinantes funcionales de matrices cuadradas de orden tres. Sin embargo, este comentario se hace en retrospectiva ya que el mismo Lagrange no vio ninguna conexión entre su trabajo, el de Laplace y Vandermonde. Este documento de 1773 es referente a mecánica, sin embargo, contiene lo que ahora consideramos como la interpretación del volumen de un determinante, de manera primigenia.

El término "determinante" fue introducido por primera vez por Gauss en "Disquisitiones Arithmeticae" (1801) al discutir formas cuadráticas. Utilizó el término porque el determinante permite establecer las propiedades de la forma cuadrática. Sin embargo, el concepto no es el mismo que el concepto actual de determinante. En el mismo trabajo, Gauss establece los coeficientes de sus formas cuadráticas en matrices rectangulares. Describe la multiplicación de matrices (que él considera una composición, por lo que aún no ha alcanzado el concepto de álgebra matricial).

Fue Cauchy en 1812, quien usó el concepto de "determinante" en su sentido moderno. Este trabajo es el más completo de los primeros sobre determinantes. Probó y discrepó los resultados anteriores y dio sus propios resultados en menores y adjuntos. En el documento de 1812, el teorema de multiplicación para determinantes se probó por primera vez, aunque en la misma reunión del Instituto de Francia, Jacques Philippe Marie Binet, también leyó un documento que contenía una prueba del teorema de multiplicación, pero fue menos satisfactorio que el de Cauchy.

Arthur Cayley, en 1841, publicó la primera contribución inglesa a la teoría de los determinantes. En este documento, usó dos líneas verticales a cada lado de la matriz para denotar el determinante, una notación que ahora se ha convertido en estándar.

Weierstrass utilizó una definición axiomática de un determinante en sus conferencias y, después de su muerte, se publicó en 1903, la nota sobre "Teoría de los determinantes". En ese mismo año, también se publicaron las conferencias de Kronecker sobre los determinantes, nuevamente después de su muerte. Con estas dos publicaciones, se establece de manera formal, la teoría moderna de los determinantes, pero la teoría matricial tardó un poco más en convertirse en una teoría plenamente aceptada.

2.1 Concepto de determinante de una matriz

Definición de determinante. Un determinante es una función que asigna un número real a una *matriz cuadrada*.

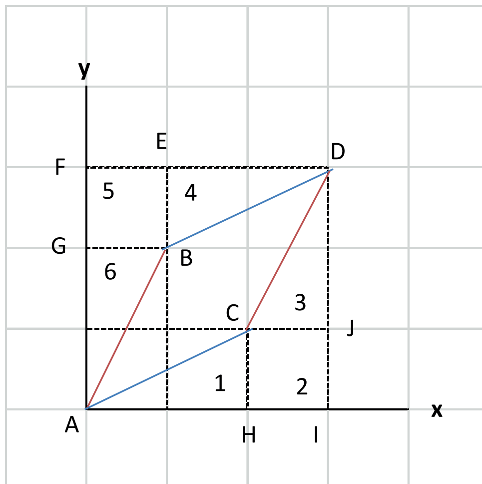
La interpretación geométrica a partir de una matriz cuadrada de orden dos es la siguiente:

Se de forma general una matriz de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix}$$

Teniéndose los elementos numéricos siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Se asume que las columnas de la matriz A_2, conforman los pares ordenados en al plano cartesiano (x,y), lo que permite su representación geométrica.

Se pueden establecer entonces áreas definidas para los cuadrados (l^2) y triángulos (½ bh) que se definen como:

Π_1 = área de AHC = ½ $(2)(1) = 1$

Π_2 = área de HIJC = $(1)(1) = 1$

Π_3 = área de CDJ = ½ $(2)(1) = 1$

Π_4 = área de EBD = ½ $(2)(1) = 1$

Π_5 = área de EBFG = $(1)(1) = 1$

Π_6 = área de AGB = ½ $(2)(1) = 1$

Π_T = área AIDF = (3)(3) = 9

Definimos como el *área del rombo* (Π_r) al *área total* (A_T) menos la *suma* del resto de las *áreas* obtenidas *($\Pi 1$ a $\Pi 6$)*, definido como:

$$\Pi_r = \Pi_T - \sum_{i=1}^{6} \Pi_i = 9 - 6 = 3$$

Por lo tanto, el *determinante de la matriz A será Π_r*.

Sea A una matriz cuadrada de cualquier orden, se representa simbólicamente al determinante de A como $|A|$ o *det (A)*

La diferencia entre una matriz y un determinante consiste, en que mientras la matriz es un arreglo rectangular de números en filas y columnas, el determinante es un número perfectamente definido y asignado a una matriz.

2.1 Determinante de orden dos

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix}$ una matriz cuadrada de orden dos, entonces su determinante queda definido por:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Se puede observar que el producto de arriba abajo de izquierda a derecha es positivo y que el producto de derecha a izquierda de arriba abajo es negativo.

Ejemplo 1. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, calcule el $|A|$

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(5) = 6 - 5 = 1$$

Ejemplo 2. Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, calcule el $|B|$

Solución

$$B = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(5) - (2)(-4) = -15 + 8 = -7$$

2.2 Determinantes de orden tres

En los determinantes de orden tres existen varias formas de calcularlos, uno de los métodos consiste en repetir las dos primeras columnas a la derecha del determinante, otro en repetir los dos primeros renglones en la parte inferior del determinante, otro método es el llamado del triángulo; estos métodos se les conoce como el método de Zarrus y por último el método de menores y cofactores. Es importante remarcar que los métodos de solución señalados anteriormente sólo son válidos para determinantes de orden tres, con excepción del método por menores y cofactores que es un método general aplicable a determinantes de cualquier orden.

2.3 Regla de Zarrus para la solución de determinantes de orden tres

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; para encontrar el determinante asociado por el método de *Zarrus* se pueden utilizar las siguientes técnicas.

2.3.1 Solución por el método de repetir columnas

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Este método consiste en repetir las dos primeras columnas, después de la tercera columna como se ve a continuación

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix}$$

- - - + + +

Se puede observar que a partir de la diagonal principal existen tres paralelas de tres elementos cada una a las cuales se les asocia un signo positivo y a las diagonales a partir de la segunda diagonal principal se les asigna signo negativo, como se ve en la representación de arriba quedando el determinante como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

2.3.2 Solución por el método del triangulo

Este método consiste en multiplicar la diagonal principal, luego se le suma una de las diagonales secundarias multiplicada por el extremo opuesto, luego se le suma la otra diagonal secundaria multiplicada por el extremo opuesto, todos estos sumandos son positivos salvo que algún numero en estas diagonales no los cambie. Esto se puede ver a continuación

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (\ )$$

Los números negativos se obtienen de forma semejante con la segunda diagonal principal como se muestra a continuación

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (\ ) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{33}a_{12})$$

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Por lo tanto

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

El cual es la misma solución que de repetir columnas. El método de repetir renglones consiste en repetir los dos primeros renglones debajo del tercer renglón, formándose ternas semejantes al método de repartir columnas y al método del triangulo

Ejemplo 3. Calcule el determinante de la matriz siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Solución por el método del triángulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = [(1)(1)(-5) + (-2)(4)(-3) + (3)(4)(2)]$$
$$- [(-3)(1)(2) + (4)(4)(1) + (3)(-2)(-5)]$$
$$= -5 + 23 + 24 + 6 - 16 - 30 = 3$$

Solución por el método de repetir columnas

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix} =$$
$$= [(1)(1)(-5) + (3)(4)(2) + (-3)(-2)(4)]$$
$$- [(-3)(1)(2) + (1)(4)(4) + (3)(-2)(-5)] = 3$$

2.4 Menores y cofactores

Este método es un método general para calcular determinantes para matrices cuadradas de cualquier orden.

Definición de determinante. Si tenemos la matriz cuadrada $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, definimos entonces el determinante, de la siguiente forma:

$$\det(A) = |A| = \sum a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|, con1 = 1, \dots\dots, n, \qquad j = 1, \dots\dots, n$$

donde $|M_{ij}|$ es un determinante menor que resulta de eliminar el renglón i y la columna j; por otra parte $a_{ij} = -(-1)^{i+j} M_{ij}$, a a_{ij}, se le conoce como el *cofactor* del elemento a_{ij}.

Aplicando este método a las matrices de orden tres, como la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dada la definición anterior, obtenemos

$$\det(A) = |A| = \sum a_{ij}(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|, con1 = 1,2,3 \;\; j = 1,2,3 \text{ ; esto es}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 4. Dada la matriz $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$, encuentre el |A|, por el método de menores y cofactores

Solución

Fijaremos el primer renglón y sustituiremos las columnas empezando por la columna uno.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-21) - (3)(2) + (-3)(-10)$$

$$= -21 - 6 + 30 = 3$$

El determinante es el mismo que el obtenido en el problema 3.

Es conveniente aclarar que el determinante se puede obtener fijando el renglón o la columna que se quiera, teniendo cuidado de poner el signo que le corresponda a cada menor. El cual se obtiene de la manera siguiente:

$$(-1)^{i+j}\begin{cases} 1 \; si \; i + j \; es \; par \\ -1 \; si \; i + j \; es \; impar \end{cases}$$

El método de menores y cofactores puede hacerse muy largo de trabajar sobre todo cuando el orden de los determinantes es de cuatro o más. La solución se puede simplificar aplicando las operaciones elementales entre renglones y columnas.

Ejemplo 5. Encuentre el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Solución

1. Se selecciona, bien sea, un renglón o una columna (si no lo hay se obtiene con operaciones entre renglones o columnas)
2. Seleccionemos el uno que se encuentra en el primer renglón

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2R_1 & + & R_2 \\ & & \\ -2R_1 & + & R_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Se aplica el método de cofactores

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 4 = 3$$

Obteniéndose el mismo resultado que el ejemplo 4.

También se puede encontrar la solución de un determinante utilizando la matriz triangular.

Teorema 1. Si A es una *matriz triangular* de orden n, el *det(A)* es el producto de los elementos de la diagonal principal, esto es, $det(A) = a_{11}\, a_{22} \ldots\ldots a_{nn}$.

Ejemplo 6. Encuentre el determinante de la matriz A, utilizando el *teorema 1*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Solución

Se reduce la matriz A aplicando operaciones elementales a fin de obtener la forma escalonada

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2R_1 & + & R_2 \\ & = & \\ -2R_1 & + & R_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3R_3 & + & R_2 \\ & = & \\ & & \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2R_2 & + & R_3 \\ & = & \\ & & \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicando el teorema obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (1)(1)(3) = 3$$

Podemos también realizar la siguientes operaciones

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2R_1 & + & R_2 \\ & = & \\ -2R_1 & + & R_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{2}{7}R_2 & + & R_3 \\ & = & \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} \end{vmatrix} = (1)(7)\left(\frac{3}{7}\right) = 3$$

Teorema 2. El determinante de una matriz cuadrada *A* es igual a cero, si y sólo si, la matriz *A es singular.*

det (A) = 0 → A es singular

Teorema 3. Una matriz cuadrada *A* es invertible, si y sólo si, el determinante de la matriz A es diferente de cero

det (A) ≠ 0

2.5 Propiedades de los determinantes

Sean *A* y *B* dos *matrices cuadradas*, entonces las siguientes propiedades se cumplen.

i. Si en la matriz *A* existe un renglón o una columna de ceros, el *det (A) = 0*

$$Si\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ii. Si en la matriz *A* existen dos renglones (o columnas) iguales o proporcionales, entonces *det (A) = 0*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} entonces\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 - 12 + 12 + 0 - 8 = 0$$

iii. Si en una matriz *A* se intercambian dos renglones o columnas entonces el *det (A)* se multiplica por *(–1)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \; y \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Se puede observar que en el segundo determinante se intercambiaron los renglones con respecto al primer determinante.

iv. El determinante de la matriz *A* es igual al *determinante* de su *transpuesta*, esto es, *det* (*A*) = *det* (*A*')

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \qquad y \quad |A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

v. Si una matriz *A* tiene un renglón o columna el cual es un múltiplo escalar *k* diferente de cero, éste se pude factorizar del determinante de *A*.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

vi. Dada una matriz cuadrada *A* de orden *n* y *k* un escalar, se cumple que,

$$\det(kA) = k^n det(A)$$

Sea A una matriz cuadrada de orden 4, si |A| = 4, obtenga |3A|

$$|3A| = 3^4|A| = 3\ ^4(A) = 324$$

vii. Dadas *A* y *B*, el determinante del producto de *A* y *B* es igual al producto de los determinantes de *A* y *B*, esto es, ***det (AB) = det (A) det (B)***

Sea A $= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \; y \;\; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, se cumple que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 15 = 3$$

$$det(A)\ det(B) = (1)(3) = 3$$

$$|AB| = \left| \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} (2-6) & (-5+12) \\ (6-15) & (-15+30) \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -9 & 15 \end{vmatrix} = -60 + 63 = 3$$

Se cumple que el *det(A) det(B) = det (AB)*

viii. El determinante de la matriz identidad *(I)* es igual a uno

$$det\,(I) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1)(1) = 1$$

ix. El determinante de una matriz triangular superior o inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal principal

x. Una matriz cuadrada *A* es invertible si y sólo si el *det (A) ≠ 0*

2.6 Matriz de cofactores

Definición de matriz de cofactores. Sea *A* una matriz cuadrada de orden *n* y si es cofactor del elemento de la matriz *A*, entonces la matriz resultante se llama *matriz de cofactores de A*

$$cof(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \vdots & a_{3n} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2.7 Matriz adjunta

Definición de matriz adjunta. La matriz adjunta de *A* es la matriz transpuesta de cofactores de *A*, *Adj(A) = (Cof A)'*

$$\text{adj A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Una vez que hemos estudiado los determinantes y definido la matriz adjunta calcularemos la matriz inversa de una matriz *A* con el siguiente teorema.

Teorema 4. Si *A* es una matriz cuadrada de cualquier orden invertible, decimos que la matriz inversa de *A*, es igual a la matriz adjunta de *A* entre su determinante.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}, \qquad |A| \neq 0$$

Sea *A* una matriz cuadrada de orden dos, dada por A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ para obtener su inversa por el método de la matriz adjunta, realizan los siguientes pasos:

1. Calcular el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. Se obtiene la matriz adjunta

$$a_{11=}d \qquad a_{21} = -b$$
$$a_{12=} - c \qquad a_{22=}a$$

$$adjA = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3. Aplicando el teorema 4, se obtiene

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Esta relación nos permite calcular en una forma rápida la inversa de una matriz cuadrada de orden dos.

$$A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ejemplo 7. Dada la matriz

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre su matriz inversa.

Solución

$$A^{-1} = \frac{1}{6-5}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6-5) & (-10+10) \\ (3-3) & (-5+6) \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$, encuentre su inversa.

Solución

$$A^{-1} = \frac{1}{-6+6}\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{0}\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A^{-1} no existe ya que se presenta una indeterminación

Ejemplo 8. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, encuentre su matriz inversa.

Solución

1. Se calcula el determinante de la matriz A, para ver si tiene inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 4 - 9 + 24 - 3 + 8 = 8 \neq 0$$

Como el determinante es diferente de cero la matriz tiene inversa

2. La matriz adjunta de A es la matriz de cofactores de A transpuesta

$$a_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-16-3) = -19 \quad a_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6 \quad a_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (-3+8) = 5$$

$$a_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-9) = 1 \quad a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (4-6) = -2 \quad a_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

$$a_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2+12) = 14 \quad a_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+3) = -4 \quad a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-4+2) = -2$$

De las matrices calculadas, obtenemos

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -19 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 14 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, podemos calcular la *inversa de la matriz A*

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -19 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 14 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9. Dada la matriz A $= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, *encuentre su matriz inversa.*

Solución

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -80 + 60 - 12 + 32 = 0$$

La matriz *A* no tiene inversa ya que su determinante es igual a cero

Ejercicios propuestos

1. Calcule el rango de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 10 & -7 \\ 3 & -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Calcule el determinante de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

3. Calcule el determinante de la siguiente matriz utilizando el teorema del cálculo del determinante por matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Obtenga la matriz inversa de A utilizando la fórmula $\frac{1}{|A|}$ *Adj*(*A*)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Dios hace aritmética
KARL FRIEDRICH GAUSS

ANTECEDENTES[2]

Los babilonios sabían cómo resolver problemas concretos que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado, usando complementación de cuadrados o sustitución, así como también ecuaciones cubicas y bicuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.

Por su parte, los matemáticos chinos durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal.

Por ejemplo, en el tratado "Nueve capítulos sobre el Arte Matemático", publicado durante la Dinastía Han, así como un método para su resolución, conocido como la regla "fan-chen", la cual, en esencia, es el conocido método de eliminación gaussiana de nuestros días. Es interesante recordar el problema que dio origen a este sistema lineal, el cual es similar al planteado por los babilonios.

Luego vendrían los aportes de los matemáticos islámicos y europeos, quienes siguieron cultivando el pensamiento lineal. Por ejemplo, Leonardo de Pisa

2 Véase "Divulgaciones Matemáticas", vol. 14, núm. 2(2006).

(1180-1250), mejor conocido como Fibonacci, en su obra "Liber Quadratorum" publicada en 1225.

Los sistemas de ecuaciones lineales comenzaron a ser estudiados sistemáticamente por Leibniz y Cramer a mediados del siglo XVIII. Este último matemático, expuso lo que hoy conocemos como regla de Cramer para los sistemas de orden tres. A mediados del siglo XIX fue Cayley, al estudiar las matrices, quien dedujo la fórmula general de la regla de Cramer y quien expuso claramente la condición necesaria y suficiente para que un sistema cuadrado de ecuaciones lineales tuviera solución única, a saber, que la matriz de los coeficientes del sistema fuera invertible.

Frobenius introdujo la noción de rango de una matriz en 1879, aunque en relación con los determinantes. Esta definición permitió generalizar el teorema que hoy conocemos como teorema de Rouche-Frobenius.

Gauss dedujo a principios del siglo XIX un método que permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales. Este método cayó en el olvido pues es más engorroso que la presentación matricial hecha por Cayley y por Frobenius. Jordan dedujo un algoritmo alternativo a la fórmula presentada por Cayley para calcular la inversa de una matriz. Hoy conocemos este método como el algoritmo de Gauss-Jordan.

A medida que en otras disciplinas científicas se iba encontrando que los problemas se podían plantear en términos de sistemas de ecuaciones lineales los matemáticos se empezaron a preocupar de aspectos como el número de operaciones en un algoritmo. Pronto se dieron cuenta que la fórmula para el cálculo de la inversa es muy costosa por el número de operaciones, mientras que el método de Gauss exigía un número considerablemente menor.

Un problema muy complicado es el siguiente: ¿De qué forma contribuyen los errores de redondeo individuales al error total? Fue atacado por primera vez por Von Neumann, si bien sólo encontró estimaciones muy complicadas. Actualmente se utiliza el método de la pivotación parcial, una ligera variante del método de Gauss, para intentar que los errores parciales sean los menores posibles. En 1948, el matemático inglés Alan Turing desarrolló la factorización LU.

3.1 Concepto de ecuación lineal

Definición de una ecuación lineal. Una ecuación lineal es una igualdad donde intervienen una o más variables o incógnitas a la primera potencia por determinar.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Todos los valores que al ser substituidos en las variables de la ecuación lineal, satisfacen dicha ecuación y son llamados: *solución de la ecuación lineal o conjunto solución (C.S)*

Ejemplo 1. Dada la ecuación lineal $2x + 4 = 0$ encuentre su conjunto solución.

Solución

$$4x - 8 = 0;\ x = 2$$
$$C.S. = \{2\}$$
$$\text{dado que } 4(2) - 8 = 0$$

Ejemplo 2. Encuentre el conjunto solución de la ecuación $5x + y = 19$

Solución

$$y = 19 - 5x$$

Para cada valor de x, se obtendrá un valor de y, generalizando podemos parametrizar la variable x. Si $x = t$ entonces $y = 19 - 5t$; donde $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, su $C.S. = \{(x, y) / x = t,\ y = 19\text{-}5t,\ t \in R\}$. Se observa que existe un *número infinito de soluciones.*

En general se puede encontrar el conjunto solución de una ecuación lineal en *n-variables*.

Un conjunto de ecuaciones lineales en las variables x_1, x_2,……,x_n es un conjunto finito de ecuaciones lineales en dichas variables.

Un sistema de ecuaciones lineales con ***m*** *ecuaciones* y ***n*** *variables* está dado por:

$$\begin{array}{c} a_{11}\,x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=b_1 \\ a_{21}\,x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}\,x_n=b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\cdots+a_{mm}\,x_n=b_m \end{array}$$

Determinamos que las a_{ij} son constantes y son los *coeficientes* de las variables del sistema de ecuaciones, los b_n son constantes, x_1, x_2,……., xn son las *incógnitas* de la ecuación lineal. Las constantes con doble subíndice a_{ij} se interpretan de la siguiente manera: el primer subíndice *(i)* nos indica la ecuación en que se encuentran y el segundo subíndice *(j)* nos indica a que incógnita está aplicado.

3.2 Solución de un sistema de ecuaciones lineales por Gauss-Jordan

La solución del sistema de ecuaciones lineales se puede obtener trasformando el sistema de ecuaciones en un sistema equivalente que resulta más fácil de resolver, lo que permite obtener un mismo conjunto solución. Este nuevo sistema se obtiene aplicando las operaciones elementales sobre los renglones para obtener una matriz escalonada reducida.

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden *no tener solución, solución única, o solución múltiple.*

Ejemplo 3. Encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{c} x+5y+3z=7 \\ 3x+2y+4z=2 \\ 5x-3y-4z=4| \end{array}$$

Solución:

Se resta 3 veces la primera ecuación a la segunda y se resta 5 veces la primera ecuación a la tercera.

$$\begin{array}{c} x+5y+3z=7 \\ 3x+2y+4z=2 \\ 5x-3y-4z=4 \end{array}$$

Se multiplica $-\frac{1}{13}$ la segunda ecuación

$$x + 5y + 3z = 7$$
$$-13y - 5z = -10$$
$$-28y - 19z = -31$$

Se suma 28 veces la segunda ecuación a la tercera y se resta 5 veces la segunda ecuación a la primera.

$$x + 5y + 3z = 7$$
$$y + 5/3z = 10/13$$
$$-28y - 5z = 23$$

Se multiplica la tercera ecuación por $-\frac{13}{107}$ y se resta $\frac{5}{13}$ veces la tercera ecuación a la segunda

$$x + \frac{14}{13}z = -\frac{4}{13}$$
$$-y + \frac{5}{13}z = \frac{10}{13}$$
$$-\frac{107}{13}z = -\frac{129}{13}$$

Se resta 17/13 veces la tercera ecuación a la primera

$$x + \frac{14}{13}z = -\frac{4}{13}$$
$$y = \frac{206}{107}$$
$$z = -\frac{129}{107}$$

Obteniéndose como resultado

$$\begin{cases} x = \dfrac{106}{107} \\ y = \dfrac{206}{107} \\ z = -\dfrac{129}{107} \end{cases}$$

Por lo tanto, su conjunto solución está dado por: C.S.= { (x, y, z)/ x =2, y = 1, z =-3}; como se puede ver en este sistema tiene una **solución única**

Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas también se puede expresar matricialmente por medio de la ecuación equivalente:

$$AX = B$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} a_{11} \dots & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \dots & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Como se puede observar $\boldsymbol{A}$ representa la matriz de coeficientes a_{ij}, $\boldsymbol{X}$ representa la matriz columna de incógnitas, $\boldsymbol{B}$ representa la matriz columna de términos constantes b_m.

Un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial con la que llamaremos *matriz aumentada*.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} \dots & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} \dots & a_{22} & \dots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \dots & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales se puede encontrar a partir de los siguientes pasos:

a) Obtener la matriz aumentada del sistema de ecuaciones

b) Resolver el sistema de ecuaciones aplicando la eliminación de *Gauss o de Gauss-Jordan*.

Ejemplo 4. Encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$x + y + 3z = 7$$
$$3x + 2y + 4z = 2$$
$$5x - 3y - 4z = 4$$

Solución

Escribimos una matriz aumentada de este sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

Se encuentra la matriz escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3R_1 + R_2 \\ \sim \\ -5R_1 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & -19 \\ 0 & -8 & -19 & -31 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1)R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & -8 & -19 & -31 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_3 + 8R_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 21 & 121 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1/21R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{121}{21} \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - 5R_3 \\ \sim \\ R_1 - 3R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{-72}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-206}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{121}{21} \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 - R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-10}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-206}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{121}{21} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} x = \frac{-10}{21} \\ \rightarrow y = \frac{-206}{21} \\ z = \frac{121}{21} \end{array}$$

C.S. ={ (x, y,z)/ x = $\frac{-10}{21}$, y = $\frac{-206}{21}$, z = $\frac{121}{21}$}

Como se puede ver en este sistema tiene una ***solución única.***

Ejemplo 5. Encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 3y - 4z &= -1 \\ 2x - y + 3z &= 4 \\ 3x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

Solución

Escribimos una matriz aumentada de este sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Se encuentra la matriz escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2+2R_1 \\ \sim \\ R_3-3R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 6 \\ 0 & -7 & 11 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1/7R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & -7 & 11 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} R_3+7R_2 \\ \sim \\ R_1-3R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{gathered} x+\frac{5}{7}z=\frac{11}{7} \\ y-\frac{11}{7}z=-\frac{6}{7} \\ 0=0 \end{gathered}$$

Se puede ver que es un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo tanto, tendrá ***múltiples soluciones.***

Parametrizando: Si z = a

$$x+\frac{5}{7}z=\frac{11}{7} \qquad\qquad x=-\frac{5}{7}a+\frac{11}{7}$$

$$y=\frac{11}{7}z-\frac{6}{7} \qquad\qquad y=\frac{11}{7}a-\frac{6}{7}$$

$$C.S. = \{(x,y,z)/\ x=-\frac{5}{7}a+\frac{11}{7},\ y=\frac{11}{7}a-\frac{6}{7}\ z=a,\ con\ a\in R\}$$

Ejemplo 6. Encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} y-4z=8 \\ 2x-3y+2z=1 \\ 5x-8y+7z=1 \end{gathered}$$

Solución

Escribimos una matriz aumentada de este sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

Se encuentra la matriz escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2R_1}}{\overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right] \underset{R_3 + \frac{1}{2}R_2}{\overset{R_3 - 5R_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_1 + \frac{3}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & \frac{25}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x - 5z &= \frac{25}{2} \\ y - 4z &= 8 \\ 0z &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Se puede observar que el sistema presenta una inconsistencia, por lo tanto, ***no tiene solución***, ya que es imposible que $0z = 5/2$

Ejemplo 7. Encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y &= -6 \\ y + z &= 3 \\ z + 2w &= 4 \\ 2x - 3w &= 5 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

Se encuentra la matriz escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 0 & -3 & 5\end{array}\right]\underset{\sim}{2R_1-R_4}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 0 & -3 & 17\end{array}\right]\underset{\sim}{2R_2+R_4}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -11\end{array}\right]$$

$$2R_3-R_4\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19\end{array}\right]\underset{\sim}{-2R_2+R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -34\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19\end{array}\right]\underset{\sim}{-R_3+R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 37\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -34\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_2+R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 31\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 37\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -34\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19\end{array}\right]$$

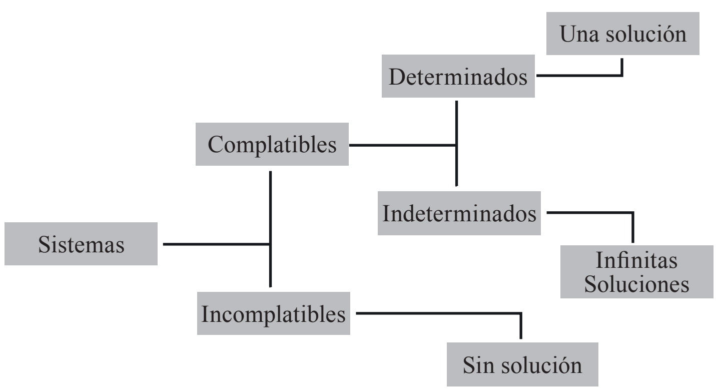
$$x = 31$$
$$y = -37$$
$$z = -34$$
$$w = 19$$

La solución asociada al sistema de ecuaciones es una ***solución única.*** Y su conjunto solución asociado es: *C.S.* $= \{(x, y, z)/\ x = 31,\ y = -37,\ z = -34 \wedge w = 19\}$

Ejemplo 8. En qué condiciones el siguiente sistema de ecuaciones es compatible o consistente:

$$x - 2y + 4z = a$$
$$2x - 3y + 5z = b$$
$$-3x + 5y - 9z = c$$

Solución



De acuerdo con el cuadro anterior, deberemos considerar que la solución del sistema de ecuaciones resultante es determinado y con una única solución o bien indeterminado con múltiples soluciones.

Escribimos la matriz aumentada de este sistema de ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 2 & -3 & 5 & b \\ -3 & 5 & -9 & c \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 2 & -3 & 5 & b \\ -3 & 5 & 9 & c \end{array}\right] \begin{array}{c} -2R_1 + R_2 \\ \sim \\ 3R_1 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & a \\ 0 & 1 & -3 & -2a+b \\ 0 & -1 & 3 & 3a+c \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 + R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 0 & 1 & -3 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{array}\right]$$

Escribimos el sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} x - 2y + 4\,z = a \\ y - 3z = -2a + b \\ 0 = a + b + c \end{gathered}$$

Para que el sistema sea consistente se debe cumplir

$$0 = a + b + c$$

Para ello disponemos de una incógnita en función de las restantes, podemos utilizar la que sea más sencilla de despejar

$$a = -b - c;\ con\ b,\ c \in R$$

con esto, aseguramos que el sistema tendrá una solución múltiple.

Por otro lado, al obtener la matriz resultante determinamos que no hay solución única. El sistema será incompatible o inconsistente si:

$$a + b + c \neq 0$$

obteniéndose que el sistema de ecuaciones, no tiene solución.

3.3 Solución de un sistema de ecuaciones por el método de la matriz inversa

Consideremos la ecuación matricial $AX = B$, donde A es una matriz cuadra, despejando se obtiene:

$$X = A^{-1} B$$

Ejemplo 9. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales encuentre el conjunto solución usando la matriz inversa.

$$\begin{aligned} 3 - y + z &= 1 \\ x + 2z\ - z &= 2 \\ -2x + y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

Solución

Se escribe la matriz de coeficientes del sistema A

$$A = \begin{bmatrix} 3 - 1 & 1 \\ 1 & 2 - 1 \\ -2 & 1 - 3 \end{bmatrix}$$

La matriz *A* tiene inversa si su determinante es diferente de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-18 - 2 + 1) - (-4 + 3 - 3) = -15 \neq 0$$

Se calcula la inversa *A*, en este problema utilizaremos el método de Gauss-Jordan a partir de: [A|I]

$$[A \mid I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{7}{15} & \frac{-4}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{-7}{15} \end{array}\right)$$

Una vez obtenida la matriz inversa se multiplica por la matriz columna de constantes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{-1}{3} & \frac{7}{15} & \frac{-4}{15} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{-7}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

Determinamos ahora el conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{matrix} x = 2/3 \\ y = 1/3 \\ z = -2/3 \end{matrix}$$

Si la inversa de la matriz *A*, no existe, no significa que el sistema no tenga solución, recuerde, que el sistema puede tener solución múltiple.

3.4 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Definición de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si todos los términos constantes son cero y la ecuación matricial equivalente es $AX = 0$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 \dots & a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = & 0 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = & 0 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 \dots & a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = & 0 \end{matrix}$$

Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos siempre tienen solución, y se conoce como *solución trivial*, si existen otras soluciones se dice que son *soluciones no triviales*, la inconsistencia nunca se presenta. La solución trivial ocurre cuando todas las incógnitas son cero.

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones homogéneo, se obtiene de la misma forma en que se encontró el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones no homogéneos.

Ejemplo 10. Dado el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo, encuentre su conjunto solución.

$$\begin{matrix} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{matrix}$$

Solución

Escribimos la matriz aumentada de este sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Se encuentra la matriz escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{R_2 - R_1}{\overset{\frac{1}{2}R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{2}{5}R_2}{\overset{R_3 - 3R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \underset{R_1 + \frac{3}{2}R_2}{\overset{R_3 - \frac{11}{2}R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \underset{R_2 + R_3}{\overset{\frac{1}{6}3R_3}{}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] R_1 + R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$z = 0$$

El conjunto solución obtenido es: C.S. = {(x, y, z) /x = 0, y = 0, z = 0}. El sistema de ecuaciones homogéneo, como se puede ver, sólo tiene la solución trivial.

Ejemplo 11. Dado el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo, encuentre su conjunto solución.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \quad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \quad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Escribimos la matriz aumentada de este sistema de ecuaciones y resolvemos por el método de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Se encuentra la matriz reducida.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 5 & 0\\ -1 & -2 & 2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \underset{R_2+\ R_1}{\overset{-1/2\,R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 5/2 & 0\\ 0 & -1 & 3/2 & -3 & 7/2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \begin{matrix} R_3-R_1\\ -R_2\\ R_1-R_2\\ -2/3\,R_3\end{matrix} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 6 & 0\\ 0 & 1 & -3/2 & 3 & -7/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \overset{R_4-R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 6 & 0\\ 0 & 1 & -3/2 & 3 & -7/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 & 0\end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{matrix} R_2+3/2\,R_3\\ R_1-R_3\\ R_2-3R_4\\ R_1+3R_4\end{matrix}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 & 0\end{array}\right]$$

Se escribe el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad -\tfrac{1}{3}x_5 &= 0\\ x_2 \qquad 4x_5 &= 0\\ x_3 \ \ \tfrac{7}{3}x_5 &= 0\\ x_4-\tfrac{4}{3}x_5 &= 0\end{aligned}$$

Despejamos las variables en función de x_5

$$\begin{gathered} x_1=\tfrac{1}{3}x_5\\ x_2=-4x_5\\ x_3=-\tfrac{7}{3}x_5\\ x_4=\tfrac{4}{3}\end{gathered}$$

Parametrizando x_5

$$\begin{gathered} x_1=\tfrac{1}{3}x_5\\ x_2=-4x_5\\ x_3=-\tfrac{7}{3}x_5\\ x_4=\tfrac{4}{3}x_5\end{gathered}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$C.S.=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\ |x_1=\frac{1}{3}a, x_2=-4a, x_3=-\tfrac{7}{3}a, x_4=\tfrac{4}{3}\,a, x_5=a; \forall a\epsilon\mathbb{R}\right\}$$

y el sistema es compatible con múltiples soluciones

3.5 Solución de un sistema de ecuaciones por el método de Cramer

Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas de la forma $AX = B$, una matriz cuadrada A que representa la matriz de coeficientes a_{ij}, X representa la matriz columna de incógnitas, B representa la matriz columna de términos independientes b. Es importante recordar que si el determinante de A es diferente de cero, entonces el sistema tiene solución única.

La solución para el sistema de ecuaciones por el método de Cramer, se obtiene a partir del siguiente cociente de determinantes de las matrices A y A_j representado la ecuación matricial de la siguiente forma:

$$x_i = \frac{|A_j|}{|A|};\ i = 1, 2, \ldots., n$$

A_j, es la matriz que resulta al reemplazar la *i–ésima* columna de A por la matriz de B.

Ejemplo 12. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por la regla de Cramer si es posible.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ +2y + z &= 2 \\ x \qquad + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Solución

Llamaremos ΔS al determinante del sistema de ecuaciones, con la finalidad de sustituir en

$$x_1 = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{|A_j|}{\Delta S}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta S} = \frac{4 - 4 + 9}{\Delta S} = \frac{9}{11} = \frac{9}{11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta S} = \frac{1 + 10 - 6}{\Delta S} = \frac{5}{11} = \frac{5}{11}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta S} = \frac{2 - 2 + 12}{\Delta S} = \frac{12}{11} = \frac{12}{11}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es *C.S.* $= \left\{(x, y, z) / x = \frac{9}{11}, y = \frac{5}{11}, z = \frac{12}{11}\right\}$, lo que nos indica que el sistema de ecuaciones posee una *solución única*.

Ejercicios propuestos

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x - 6y - \quad\quad 8z &= 4 \\ -2x + 3y + \quad\quad 5z &= -5 \\ x + 2y + (k^2-15)z &= k + 13 \end{aligned}$$

Hallar los valores de *k* para los cuales el sistema de ecuaciones lineales, permita obtener:

a) Solución múltiple

b) No tenga solución

c) Solución única

2. Encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_3 + 3X_4 - X_5 &= 0 \\ X_2 - 2X_3 + X_4 + 3X_5 &= 0 \\ -2X_1 + X_2 - X_4 + 4X_5 &= 0 \\ -X_1 + 3X_2 + X_3 + X_5 &= 0 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. Encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones siguiente por el método de la matriz inversa.

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_3 + 3X_4 - X_5 &= -1 \\ X_2 - 2X_3 + X_4 + 3X_5 &= 7 \\ -2X_1 + X_2 - X_4 + 4X_5 &= 3 \\ -X_1 + 3X_2 + X_3 + X_5 &= 2 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 &= 4 \end{aligned}$$

4. Del ejercicio anterior encuentre su solución por el método de Cramer

CAPÍTULO 4

ESPACIOS VECTORIALES

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema,
pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento.
El problema que se plantea puede ser modesto: pero, si pone a prueba la
curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas"
George Pólya

Antecedentes[3]

A finales del siglo XVII fueron redescubiertas y desarrolladas las ideas originales de los babilonios, y principalmente de los chinos, sobre el pensamiento lineal. Recordemos que hasta el siglo XVIII el álgebra era, esencialmente, el arte de resolver ecuaciones de grado arbitrario. El matemático y filósofo francés, y uno de los iniciadores de la Enciclopedia, D'Alembert descubre que las soluciones de un sistema $Ax = b$ forman una variedad lineal. Asimismo, Euler, Lagrange y el propio D'Alembert se dan cuenta que la solución general del sistema homogéneo $Ax = 0$ es una combinación lineal de algunas soluciones particulares.

En 1843, el matemático irlandés sir William Rowan Hamilton (1805-1865) descubre los Quaternions como el primer y único anillo de división no conmutativo sobre los números reales ([19]-[20]), la unicidad fue probada por Georg Frobenius (1849-1917) en 1879. Años antes, en 1863, Karl Weierstrass

3 Véase "Divulgaciones Matemáticas", vol. 14, núm. 2(2006).

(1815-1897) había probado que el cuerpo de los números complejos es el único cuerpo conmutativo sobre los números reales.

En esa época aparecen con Hamilton, Arthur Cayley (1821-1895) y Hermann Gunter Grassmann (1809-1877) las nociones de vector y de espacio vectorial, como una axiomatización de la idea de "vector" manejada por los estudiosos de la Mecánica desde fines del siglo XVII, un hecho que representó la génesis del Cálculo vectorial y de la Matemática moderna. Además, considerado el maestro del álgebra lineal, Grassmann introduce el producto geométrico y lineal, siendo el primero de estos equivalente a nuestro producto vectorial. Asimismo, introduce las nociones de independencia lineal de un conjunto de vectores, así como el de dimensión de un espacio vectorial, y prueba la clásica identidad: $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$ para cada par de subespacios U y W de un espacio vectorial.

4.1 Espacio vectorial

Definición de espacio vectorial. Sea V un conjunto de vectores, sobre el que están definidas dos operaciones: la adición y el producto por un escalar.

4.1.1 Propiedades de un espacio vectorial

Si los siguientes axiomas se cumplen para todo vector u, v y w en V y todo escalar k, t, entonces V se llama espacio vectorial.

1. Si u y $v \epsilon$ V entonces u + v ϵ V…………………Cerradura bajo la adición
2. $u + v = v + u$………………………………………Propiedad conmutativa
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ con $w \epsilon V$……………Propiedad asociativa
4. Existe 0 ϵ V tal que………………………………..Neutro aditivo.

   $u + 0 = 0 + u$ para todo u en V
5. Para todo $u \epsilon$ V, existe $-u$ V………………………Inverso aditivo

   u + (−u) = (−u) + u = 0
6. Si $k \in$ R y $u \epsilon$ V, entonces……………………………Cerradura bajo la multiplicación escalar k u ϵ V

7. $k\,(u + v) = k\,u + k\,v$………………………………Propiedad distributiva

8. $(k + t)\,u = k\,u + t\,u$…………………………………Propiedad distributiva

9. $k\,(t\,u) = (k\,t)\,u$……………………………………..Propiedad asociativa

10. 1u = u

Ejemplo 1. Demuestre que el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen es un espacio vectorial.

Solución

Para que $\mathbb{R}^2$ sea un espacio vectorial se deben cumplir los axiomas. La ecuación general de la recta se representa por $y = mx + b$. Al pasar por el origen $b = 0$, por lo tanto, $y = mx$ con pendiente m.

$$\text{Sea } V = \{(x,y)\,|\,y = mx \text{ , } m \text{ un escalar, } x \in \mathbb{R}\}$$

La comprobación de los axiomas se presenta a continuación:

Dados $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$, y $z = (x_3, y_3)$, $0 = (0, 0)$ los cuales pertenecen a V, por lo tanto,

$$y_1 = mx_1,\ y_2 = mx_2,\ y_3 = mx_3$$
$$x = (x_1, mx_1) \in V$$
$$y = (x_2, mx_2) \in V$$
$$z = (x_3, mx_3) \in V$$
$$0 = [0, m(0)] \in V$$

1. $x + y = (x_1, mx_1) + (x_2, mx_2) = (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2) = [(x_1 + x_2), m\,(x_1 + x_2)] \in V$

Se cumple la cerradura para la suma.

2. $x + y = (x_1, mx_1) + (x_2, mx_2) = (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2) = (x_2 + x_1, mx_2 +, mx_1) = (x_2 + mx_2) + (x_1, mx_1), = x + y$

3. $x + y + z = [(x_1, mx_1) + (x_2, mx_2)] + (x_3, mx_3) = (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2) + (x_3, mx_3) = (x_2 + x_1 + x_3\ mx_1 + mx_2 + mx_3) = (x_1, mx_1) + [(x_2, mx_2) + (x_3, mx_3) = x + y + z)]$

4. $y + 0 = (x_2, mx_2) + (0,0) = (x_2 + 0, mx_2 + 0) = (x_2, mx_2) = y$

5. $-x = (-x_1, -mx_1) = x + (-x) = (x_1, mx_1) + (-x_1, -mx_1) = (x_1 - x_1, mx_1 - mx_1) = (0,0) = 0$

6. Si k, t $\in R$, entonces k x = k $(x_1,mx_1) = (kx_1,k\,mx_1) = (kx_1,m(kx_1)) \in V$, es cerrado bajo el producto de un escalar por un vector.

7. $k(x + y) = k(x_1+x_2,mx_1+mx_2) = (kx_1 + kx_2,k\,mx_1 + kmx_2) = (kx_1,k\,mx_1) + (kx_2,k\,mx_2) = k\,(x_1,mx_1) + \mathrm{k}\,(x_2,mx_2) = kx + ky$

8. $(k + t)x = (k + t)(x_1,mx_1) = ((k + t)x_1,(k + t)mx_1)=((kx_1 + tx_1),(k\,mx_1 + t\,mx_1)=(kx_1,kmx_1) + (tx_1, tmx_1) = k(x_1,mx_1) + t(x_1,mx_1)=ku + tu$

9. $t(kx) = t(k(x_1,mx_1)) = t\,(kx_1,kmx_1) = (t\,kx_1,t\,kmx_1) = t\,k\,(x_1,mx_1) = t\,kx$

10. $1\mathrm{x} = 1(\mathrm{x}_1,\mathrm{mx}_1) = ((1)\,\mathrm{x}_1,(1)\mathrm{mx}_1) = (\mathrm{x}_1,\mathrm{mx}_1) = \mathrm{x}$

Se satisfacen los diez axiomas, por lo tanto, el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen es un espacio vacío vectorial.

Ejemplo 2. Demuestre que el conjunto de todas las matrices *m x n* es un espacio vectorial

El conjunto de las matrices (M_{mxn}) es un espacio vectorial. Se deja al alumno su desarrollo y solución.

Los siguientes ejemplos cumplen con todos los axiomas de espacio vectorial, por lo tanto, son espacios vectoriales.

- El espacio $\mathbb{R}$ de todos los números reales
- El espacio bidimensional $\mathbb{R}^2$ de todo los pares ordenados de números reales
- El espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ de todas las ternas de números reales
- El espacio *n-dimensional* $\mathbb{R}^n$ de todas las *n-adas* ordenadas de números reales
- El espacio de todas las matrices *m x n*.
- El espacio de todas las matrices *n x n*.
- El conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre la recta real
- El espacio P_n de todos los polinomios de *grado* $\leq n$.

Ejemplo 3. Demuestre si el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentra sobre una línea recta que no pasa por el origen, es un espacio vectorial.

Solución

No es un espacio vectorial ya que el axioma uno no se cumple, por lo tanto, no es un espacio cerrado bajo la suma de dos vectores.

Es primordial mencionar que, al no cumplirse con alguno de los diez axiomas, se establece que no cumple con ser un espacio vectorial.

4.2 Subespacios vectoriales

Definición de un subespacio vectorial. Un conjunto de vectores W de un espacio vectorial V, es un subespacio del espacio vectorial V, si se cumplen los axiomas de cerradura bajo la suma de dos vectores para cualesquier u y $v \in W$ y la cerradura bajo el producto de un escalar con $k \in \mathbb{R}$ y un vector u en W**.**

Es decir, un subconjunto W no vacío de un espacio vectorial V se llamará subespacio vectorial de V si satisface los siguientes axiomas:

i. Si u y $v \in W$ entonces $u + v \in W$

ii. Si $k \, \mathbb{R}$ y $u \in W$ entonces $k\, u \in$W

Se establecen dos conjuntos importantes, el primero de ellos, el llamado conjunto vacío {0}, seguido del espacio vectorial V, los cuales se llamarán subespacios triviales de V.

Ejemplo 4. Sea V = $\mathbb{R}^3$, determine si W es un subespacio de V si:

$$\mathrm{w} = \{(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3 \,|\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_3,\mathrm{x}_3 \in \mathrm{R}|\}$$

Solución

Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v} \in W$

$\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3) = (\mathrm{u}_1,\, \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_3,\mathrm{u}_3) \in W$

$\mathrm{v} = (\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_3) = (\mathrm{v}_1,)\ \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_3,\mathrm{v}_3) \in W$

i) $u + v = (u_1, u_1 + u_3, u_3) + (v_1, v_1 + v_3, v_3) = (u_1 + v_1, (u_1, u_3) + (v_1, v_3), u_3 + v_3)$

$= (u_1 + v_1, (u_1 + v_1) + (u_3 + v_3), u_3 + v_3) \in W$

Por lo tanto, se cumple la condición de cerradura de W bajo la suma

ii) $ku = k (u_1, u_1 + u_3,u_3) = (ku_1, k(u_1 + u_3), ku_3 \in W$

Se cumple la condición de cerradura de W bajo la multiplicación por un escalar, por lo tanto, determinamos que W es un subespacio de $V = \mathbb{R}^3$

Ejemplo 5. Sea $V = M_2$, determine si S, el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{bmatrix} d & 2 \\ 2 & e \end{bmatrix}$ es un subespacio de V.

Solución

Dado $A = \begin{bmatrix} d & 2 \\ 2 & e \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} d_1 & 2 \\ 2 & e_1 \end{bmatrix} \in W$

i) $A + B = +\begin{bmatrix} d & 2 \\ 2 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d + d_1 & 4 \\ 4 & e+e_1 \end{bmatrix} \nexists W$

No se cumple el axioma de la cerradura bajo la suma. Por lo tanto, W no es un subespacio de V.

4.3 COMBINACIÓN LINEAL

Definición de combinación lineal. Dado un conjunto de vectores $u_1,u_3,u_3, \ldots \ldots u_n$ en el espacio vectorial V y sea v un vector cualquiera de V, entonces V es una combinación lineal del conjunto de vectores $u_1,u_3,u_3 \ldots \ldots u_n$ si se puede expresar como:

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3, \ldots\ldots, k_n u_n$$
$$con\ k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 6. Considere los vectores u1 = (1,–1,2), $u_2 = (2,3,-2)$,$u_3 = (-2,1,-1)$,, determine si el vector $v = (1, 7,-4)$, puede escribirse como una combinación lineal de vectores u_1, u_2, u_3.

Solución

Planteamos la ecuación, que representa una combinación lineal:

$$v = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$$

Sustituimos los vectores en la ecuación anterior:

$$(1,7,-4) = k_1\,(1,-1,2) + k_2\,(2,3,-2) + k_3\,(-2,\,1,-1)$$
$$(1,7,-4) = (k_1,-k_1,\,2k_1) + (2k_2,\,3k_2 - 2k_2) + (-2k_3,\,k_3 - k_3)$$
$$(1,7,-4) = (k_1 + 2k_2 - 2k_3\,,-k_1 + 3k_2 + k_3,\,2k_1 - 2k_2 - k_3)$$

Se representa este sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 - 2k_3 &= 1 \\ -k_1 + 3k_2 + k_3 &= 7 \\ 2k_1 - 2k_2 - k_3 &= -4 \end{aligned}$$

Se puede observar que la matriz de coeficientes de este sistema de ecuaciones está conformada por los vectores u_1, u_2, u_3 transpuestos respectivamente y la columna aumentada es el vector v transpuesto. Resolviendo este sistema de ecuaciones por el método Gauus-Jordan, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ -1 & 3 & 1 & | & 7 \\ 2 & -2 & -1 & | & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 5 & -1 & | & 8 \\ 0 & -6 & 3 & | & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & | & \frac{8}{5} \\ 0 & -6 & 3 & | & -6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & | & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & | & \frac{18}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & | & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Transformando a un sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$k_1 = 1$$
$$k_2 = 2$$
$$k_3 = 2$$

El vector v se puede escribir como una combinación lineal de los vectores u_1, u_2, u_3 de la siguiente forma:

$$v = u_1 + 2u_2 + 2u_3$$

Ejemplo 7. Dados los vectores $u_1 = (2,-1,5), u_2 = (1,-3,2)$, $u_3 = (3,-4,7)$, determine si el vector $v = (8,1,-2)$ puede escribirse como una combinación lineal de los vectores u_1, u_2, u_3.

Solución

Planteamos le ecuación, que representa una combinación lineal:

$$v = k_1u_1 + k_2 u_2 + k_3u_3$$

Sustituimos los vectores en la ecuación anterior

$$(8,1,-2) = \mathrm{k}_1 (2,-1,5) + \mathrm{k}_2 (1,-3,2) + \mathrm{k}_3 (3,-4,7)$$

Se representa este sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\begin{aligned} 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= 8 \\ -k_1 - 3k_2 - 4k_3 &= 1 \\ 5k_1 + 2k_2 + 7k_3 &= -2 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones matricialmente por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ -1 & -3 & -4 & | & 1 \\ 5 & 2 & 7 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 5 & 2 & 7 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & | & -1 \\ 0 & -5 & -5 & | & 10 \\ 0 & -13 & -13 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & -13 & -13 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & -13 & -13 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -23 \end{bmatrix}$$

Transformando el resultado a un sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} k_1 + 3k_2 + 4k_3 &= 5 \\ k_2 + \quad\quad k_3 &= -2 \\ 0k_3 &= -23 \end{aligned}$$

Se puede ver, en la tercera ecuación, que no existe un valor de k_3 que multiplicado por cero sea igual a *–23*, es decir, $0 \cdot k_3 \neq -23$

Por lo tanto, podemos concluir que los vectores u_1, u_2, u_3 no se pueden representar como una combinación lineal con el vector *v*.

4.4 Conjuntos generadores

Si cualquier vector *u* de un espacio vectorial *V* se puede expresar como una combinación lineal de vectores en un conjunto *W*, entonces *W* es un conjunto generador de *V*.

Definición de conjunto generador. Si $W = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ es un conjunto de vectores de un espacio vectorial *V, W* es generador de *V* si cualquier vector de *V* es combinación lineal de $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n$. Como se muestra a continuación:

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3, \ldots, k_n u_n$$

Ejemplo 8. Sea *W* el subespacio en $\mathbb{R}^3$, generado por los vectores $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (-2,2,1)$. Determine cuál de los siguientes vectores v_i, pertenecen a *W*

$$i)\ v_1 = (2,-2,1);\ \ \text{ii})\ v_2 = (1,-3-2);\ \ \text{iii})v_3 = (3,-1,1)$$

Solución

Los vectores propuestos de *W* generaran $\mathbb{R}^3$, si estos vectores se pueden establecer en una combinación lineal con cualquier vector en $\mathbb{R}^3$.

Sea cualesquiera vector, $v = \{a, b, c\}$ y el espacio generador $k_1, u_1, + k_2 u_2 = v$

Sustituyendo y desarrollando se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} k_1 - 2k_2 &= a \\ -k_1 + 2k_2 &= b \\ k_1 - \ \ k_2 &= c \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones matricialmente, por el método Gauss, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & a \\ -1 & 2 & \vdots & b \\ 1 & -1 & \vdots & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & a \\ 0 & 0 & \vdots & a+b \\ 1 & -1 & \vdots & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & a \\ 0 & 0 & \vdots & a+b \\ 0 & 1 & \vdots & -a+c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & a \\ 0 & 1 & \vdots & -a+c \\ 0 & 0 & \vdots & a+b \end{bmatrix}$$

El sistema sólo será consistente en el caso de que: $a + b = 0$

Los vectores en estudio se sustituyen en el subespacio generado

a) En el caso de $v_1 = (2,–2,1)$, sustituyendo en $a + b = 0$, obtenemos que: $2–2 = 0$, concluimos que si pertenece a W.

b) Para $v_2 = (1,–3,2)$, sustituyendo en $a + b = 0$, obtenemos que: $1-3 \neq 0$, concluimos que no pertenece a W.

c) En el caso de $v_3 = (3,–1,1)$ sustituyendo en $a + b = 0$, obtenemos que: $3-1 \neq 0$, concluimos que no pertenece a W.

Por lo tanto, concluimos que sólo el vector del inciso *i)* pertenece a *W.*

Ejemplo 9. Determine si el conjunto *W* genera a $\mathbb{R}^4$, de no generarlo, encuentre dos vectores que pertenezcan a *W* si:

$$W = \{(5, 4, -3, -1), (-4, -3, 2, 1), (2,1, -1,1)\}$$

Solución

Los vectores propuestos de *W* generan $\mathbb{R}^4$, sí se pueden establecer como una combinación lineal con cualquier vector $\mathbb{R}^4$.

Sea $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = v$$

Sustituyendo y desarrollando se tiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$5k_1 - 4k_2 + 2k_3 = a$$
$$4k_1 - 3k_2 + k_3 = b$$
$$-3k_1 + 2k_2 - k_3 = c$$
$$-k_1 + k_2 + k_3 = d$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & \vdots & a \\ 4 & -3 & 1 & \vdots & b \\ -3 & 2 & -1 & \vdots & c \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \vdots & d \\ 4 & 3 & 1 & \vdots & b \\ -3 & 2 & -1 & \vdots & c \\ 5 & -4 & 2 & \vdots & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \vdots & -d \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & b+4d \\ 0 & -1 & -4 & \vdots & c-3d \\ 0 & 1 & 7 & \vdots & a+5d \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & -d \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & b+4d \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b+c+d \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & a-b+d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & -d \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & b+4d \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b+c+d \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a-3b-2c-d \end{bmatrix}$$

Transformando el resultado a un sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -d \\ x_2 + 5x_3 &= b + 4d \\ x_3 &= b + c + d \\ 0 &= a - 3b - 2c - d \end{aligned}$$

El sistema será consistente cuando $a-3b-2c-d=0$, por lo tanto, W no genera a $\mathbb{R}^4$

Para encontrar vectores que pertenezcan al subespacio generado, es necesario colocar una de las incógnitas en función del resto y asignarles valores.

A partir de $b+c+d=0$, se despeja "d", obteniéndose:

$$d = -b - c$$

Sabemos que a no interviene en el conjunto generado por lo que puede ser cualquier número real, si $a=1$, $b=-2$, $c=1$ entonces el valor obtenido es $d=1$.

De esta manera, un vector que pertenece al conjunto dado es: $(1, -2, 1, 1)$

De la misma forma calculamos el segundo vector, a partir de $b+c+d=0$. Si $a=2$, $b=3$, $c=-2$

$$d = -b - c = -1$$

El segundo vector que pertenece al conjunto dado es: $(2, 3, -2, -1)$

4.5 Vectores linealmente independientes

Definición de un vector linealmente independiente. Los vectores de un espacio vectorial *V*, son linealmente independientes, si se puede poner en combinación lineal con el vector cero, esto es,

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots\ldots\ldots + k_nu_n = 0$$

Además de los escalares $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, si existe algún $k \neq 0$ entonces los vectores son linealmente dependientes.

Teorema 2. Sea un conjunto *V* con dos o más vectores, entonces es:

i) Linealmente dependiente, si y sólo si, por lo menos un vector de *V* puede expresarse como una combinación lineal de los demás vectores de *V*.

ii) Linealmente independiente, si y sólo si, ningún vector en *V* se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores de *V*.

Ejemplo 10. Dadas las matrices M_2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine si son linealmente independientes.

Solución

Planteamos la combinación lineal

$$k_1A_1 + k_2B_2 + k_3C_3 = 0$$

Desarrollamos la combinación lineal

$$k_1\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2k_1 & -2k_1 \\ 3k_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_2 & 0 \\ 0 & -3k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2k_3 \\ 3k_3 & 3k_1 \end{bmatrix} = 0$$

obteniéndose el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2k_1 + 2k_2 \quad &= 0 \\ -2k_1 \quad - 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 \quad + 3k_3 &= 0 \\ -3k_2 + 3k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones matricialmente, por el método Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ -2 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ -2 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Transformando el resultado a un sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} k_1 \quad + k_3 &= 0 \\ 2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando k_1 y k_2 del sistema anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= -k_3 \\ k_2 &= k_3 \end{aligned}$$

Se puede observar que las k, tienen una solución múltiple por lo que las matrices dadas son linealmente dependientes. Dado el teorema 2, se determina que

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Por lo tanto, las matrices son linealmente dependientes.

Ejemplo 11. El conjunto de vectores $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\} \in R^3$ son linealmente independientes y se llaman vectores canónicos de R^3.

La demostración se deja a los alumnos.

Ejemplo 12. Dados los vectores $v_1 = (1,–3,2,5), v_2 = (-2,1,0,4), v_3 = (1,0,4,2)$, determine si son linealmente independientes.

Solución

Planteamos la combinación lineal

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

Desarrollamos la combinación lineal

$$k_1\,(1,-3,2,5) + k_2\,(-2,1,0,4) + k_3\,(1,0,4,2) = 0$$

$$(k_1, -3k_1, 2k_1, 5k_1) + (-2k_2, k_2, 0, 4k_2) + (k_3, 0, 4k_3, 2k_3) = 0$$

obteniéndose el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lllllll} 2k_1 & & -2k_2 & + & k_3 & = & 0 \\ -3k_1 & + & k_2 & & & = & 0 \\ 2k_1 & & & & 4k_3 & = & 0 \\ 5k_1 & + & 4k_2 & + & 2k_3 & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones matricialmente, por el método de Gaus

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ -3 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 4 & \vdots & 0 \\ 5 & 4 & 2 & \vdots & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 14 & -3 & \vdots & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 14 & -3 & \vdots & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1/5 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 22/5 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 27/5 & \vdots & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1/5 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 27/5 & \vdots & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right]$$

La solución obtenida del sistema es $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, por lo tanto, concluimos que los vectores son linealmente independientes.

Teorema 2. Sea $W = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_r\}$ un conjunto *3*, es decir, 0 $\mathbb{R}^n$, si $r > n$, entonces W es linealmente dependiente.

Corolario 1. Un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ puede tener cuando más n vectores.

4.6 Base y Dimensión

A partir de los conceptos de conjunto de vectores generadores y de vectores linealmente independientes, podemos definir la base y la dimensión de un espacio vectorial V.

Definición de base y dimensión. Un conjunto de vectores $W = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ de un espacio vectorial V se llama una base de V si W es linealmente independiente y genera a V. La dimensión de la base es el número de vectores que hay en ella.

Ejemplo 13. Dado el siguiente conjunto de vectores

$$\mathrm{W} = \{e_1 = (1, 0 ,0),\ e_2 = (0 ,1, 0),\ e_3 = (0, 0 , 1)\}.$$

Determine si W es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución

Para que los vectores de W sean una base, deben ser linealmente independientes y generadores de $\mathbb{R}^3$. En el ejemplo de los vectores canónicos, se estableció que los vectores de W son linealmente independientes, por lo que es necesario probar que son generadores.

Para demostrar que los vectores de W son generadores de $\mathbb{R}^3$, se debe demostrar que cualquier vector $u = (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$, se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de W.

$$k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 = u$$

Sustituyendo y desarrollando, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} k_1 \qquad\qquad &= a \\ k_2 \qquad &= b \\ k_3 &= c \end{aligned}$$

el sistema es consistente, entonces los vectores de W son generadores y, por lo tanto, podemos afirmar que W es una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 14. Dado el siguiente conjunto de vectores

$$W = \{v_1, v_2, v_3\}, \text{ con } v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (1,3,1), v_3 = (-1, -1, 1)$$

Compruebe si W forma una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución

Para que los vectores de W sean una base, debe cumplirse que sean linealmente independientes y que sean generadores de $\mathbb{R}^3$.

i) El conjunto de vectores W es linealmente independientes si:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

sólo tiene solución trivial, esto es:

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Sustituyendo y desarrollando se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2k_1 + k_2 - k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 - k_3 &= 0 \\ 3k_1 + k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones matricialmente, por el método de Gauss

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 7 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 10 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & \vdots & 0 \\ 0 & 10 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 16/7 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

La solución al sistema de ecuaciones es

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes.

ii) Para probar que $W=\{v_1, v_2, v_3)$ genera a $\mathbb{R}^3$ se tiene que demostrar que cualquier vector $u = (a, b, c) \epsilon \mathbb{R}^3$, se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de W

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = u$$

Sustituyendo y desarrollando se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2k_1 + k_2 - k_3 &= a \\ -k_1 + 3k_2 - k_3 &= b \\ 3k_1 + k_2 + k_3 &= c \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones matricialmente, por el método de Gauss

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & a \\ -1 & 3 & -1 & \vdots & b \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & c \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & | & b \\ 2 & 1 & -1 & | & a \\ 3 & 1 & 1 & | & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & \vdots & a \\ 0 & 7 & -3 & \vdots & a+2b \\ 0 & 10 & -2 & \vdots & 3b+c \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & \vdots & a \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & 3a-2c \\ 0 & 10 & -2 & \vdots & 3b+c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & \vdots & b \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & 3a-2c \\ 0 & 0 & 48 & \vdots & -30a+3b+21c \end{bmatrix}$$

Como se puede ver el sistema es consistente, entonces W es generador y, por lo tanto, podemos afirmar que es una base de $\mathbb{R}^3$ que también es linealmente independiente como se probó anteriormente.

Este método de prueba es muy interesante, pero poco práctico ya que es posible probar simultáneamente que W es linealmente independiente y que genera a $\mathbb{R}^3$ así:

Observando el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2k_1 + k_2 - k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 - k_3 &= 0 \\ 3k_1 + k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Y el sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} 2k_1 &+ k_2 &- k_3 &= a \\ -k_1 &+ 3k_2 &- k_3 &= b \\ 3k_1 &+ k_2 &+ k_3 &= c \end{aligned}$$

Se puede ver que tienen la misma matriz de coeficientes, si esta matriz tiene inversa se cumple la condición de independencia lineal y además el sistema no homogéneo tiene una solución para cualquier vector u de $\mathbb{R}^3$.

La matriz de coeficientes está dada por la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A tiene inversa si su determinante es diferente de cero

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 6 + 1 - 3 + 9 + 2 + 1 = 16 \neq 0$$

Se concluye A tiene inversa W es una base para $\mathbb{R}^3$.

En el caso de que la matriz de coeficientes *no sea cuadrada*, se debe probar que son linealmente independientes y que son generadores por la definición.

Ejemplo 15. Dado el siguiente conjunto de vectores

$$W = \{v_1 , v_2 , v_3\} \text{ con } v_1 = (-3, 0, 1).\ v_2 = (0, 3, 2),\ v_3 = (2, 1, 0)$$

a) Pruebe si i) W forma una base para $\mathbb{R}^3$; ii) Si su respuesta es negativa, ¿Qué genera el conjunto de vectores?

Solución

Para que W sea una base deben cumplirse que generan a todo $\mathbb{R}^3$ y que son linealmente independientes los vectores dados. Sea $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0$$

y

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = u$$

los sistemas de ecuaciones que ambos generan tienen la misma matriz de coeficientes.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ambas condiciones se cumplen si $|A| \neq 0$ ya que existiría A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -6 + 6 = 0 \rightarrow A^{-1}$$

Les vectores dados no forman una base para $\mathbb{R}^3$ ya que no son linealmente independientes y generan a todo $\mathbb{R}^3$.

Se establece el conjunto de vectores W en combinación lineal con el vector u.

$$k_1\, u_1 + k_2\, u_2 + k_3\, u_3 = u$$

Sustituyendo y desarrollando se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -3k_1 \quad\quad\quad + 2k_3 &= a \\ 3k_1 + k_3 &= b \\ k_1 + 2k_2 \quad\quad\quad &= c \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones matricialmente. Por el método de Gauss

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & \vdots & a \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & b \\ 1 & 2 & 0 & \vdots & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & c \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & b \\ 0 & 6 & 2 & \vdots & a + 3c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & c \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a - 2b + 3c \end{bmatrix}$$

Los vectores que generan el subespacio se establecerán a partir de: a – 2b + 3c = 0.

Definición de dimensión. Si un espacio vectorial V tiene une base con n elementos, se dice que V es de dimensión finita y n es la dimensión de V

$$Dim\,(V) = n$$

La dimensión del espacio cero $\{0\}$, se define como cero. La dimensión de $\mathbb{R}^n = n$

Ejemplo 16. Encuentre una base y la dimensión del conjunto solución *W* del siguiente sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{aligned} -x &+ 3y - 3z + 2w = 0 \\ 2x &- 7y + 5z + 2w = 0 \\ 2x &- 8y + 3z - 12w = 0 \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & -7 & 5 & 2 & \vdots & 0 \\ 3 & -8 & 10 & -12 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 20 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -20 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x \quad +6z \quad -20w &= 0 \\ y \quad +z \quad -6w &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -6z + 20w \\ y &= -z + 6w \end{aligned}$$

Si $z = a$ y $w = b$

$$\begin{aligned} x &= -6a + 20b \\ y &= -a + 6b \end{aligned}$$

El vector solución es: $(x, y, z, w) = (-6a + 20b, -a + 6b, a, b)$

De acuerdo con el número de escalares que tenga el vector resultante será el número de vectores en que se descompone. En este caso tenemos *a* y *b*, por lo tanto, se descompone en dos vectores uno para *a* y otro para *b*, como se ve a continuación:

$$(x, y, z. w) = (-6a, -a, a, 0) +(20, 6b, 0, b) = a(6, -1, 1, 0) + b(20,6, 0,1)$$

Una base es: $\{(-6,-1, 1, 0), (20, 6, 0, 1)\}$ y la dimensión es *2*

Ejemplo 17. Encuentre una base y la dimensión del conjunto solución W del siguiente sistema de ecuaciones homogéneo.

$$\begin{array}{rrrrl} 4x & -6y & - z & -2w & = 0 \\ -6x & +3y & - 3z & +5w & = 0 \\ -2x & -2y & - 4z & +3w & = 0 \end{array}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -6 & -1 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 + R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -5 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right] \frac{\underset{\sim}{3R_1 + R_2}}{R_1 + R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & -18 & 8 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{-R_2 + 2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & -18 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{-1/18R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{7R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -19/9 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{1/2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -19/18 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rrcr} x = & -z & + & 19/18w \\ y = & -z & + & 4/9w \end{array}$$

Si $z = a$ y $w = b$, el vector solución es:

$$(x, y, z, w) = \left(-a + \frac{19}{18}b, -a + \frac{4}{9}b, a, b\right) = a(-1, -1, 1, 0) + b\left(\frac{19}{18}, \frac{4}{9}, 0,1\right)$$

$$= a(-1, -1, 1, 0) + \frac{b}{18}(19,8,0,18)$$

Una base es: *{(−1,−1,1,0),(19,8,0,18)}*y la dimensión es *2*

4.7 Cambio de base

Un espacio vectorial de dimensión finita distinto de *{0}* tiene varias bases, veremos cuál es la relación que existe entre las componentes de un vector respecto a dos bases diferentes.

Definición de base. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ para cada v en V, existen escalares únicos $k_1, k_2, \dots, k_n$ tales que $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$.

El vector cuyas componentes son los coeficientes de v, denotado por $\{v\}_B$ se llama vector de coordenadas de V con respecto a B, $[v]_B = (k_1, k_2, \dots, k_n)$

La matriz de coordenadas de v con respecto a B es

$$[v]_B \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 18. Dada la base $B = \{(3, -1), (1, -2)\}$ de y el vector $v = (-1, -3)$

i) Encuentre $[v]_B$

ii) Calcule el vector w si $[w]_u = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

Solución

$$v = k_1(3, -1) + k_2(1, -2)$$

$$(-1, -3) = (3k_1, -k_1) + (k_2, -2k_2) = (3k_1 + k_2, -k_1 - 2k_2)$$

Obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3k_1 \quad + \quad k_2 &= -1 \\ -k_1 \quad + \quad 2k_2 &= -3 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$k_1 = -1, k_2 = 2$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ii) Para calcular el vector w si $[w]_u = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$

se sustituye de la siguiente manera:

$$w = 5(3,\ -1)-2(1,\ -2) = (13,\ -1)$$

De manera general podemos establecer el procedimiento para realizar un cambio de base:

Sean $B_1 = \{u_1, u_2\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$. Cualquier vector $r \in \mathbb{R}^2$ se puede expresar como una combinación lineal de B_1 por ser ésta una base con el vector r, de la siguiente manera:

$$r = k_1u_1 + k_2u_2 \qquad (1)$$

Para cambiar la base de B_1 a la base B_2, se establecen los vectores de B_1 en combinación lineal con los vectores de B_2

$$u_1 = av_1 + bv_2 \text{ con } a,\ b \in R \qquad (2)$$

$$u_2 = cv_1 + dv_2 \text{ con } c,\ d \in R \qquad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1)

$$r = k_1\{av_1 + bv_2\} + k_2\{cv_1 + dv_2\}$$

factorizando v_1 y v_2

$$r = v_1\{k_1a + k_2c\} + v_2\{k_1b + k_2d\}$$

Los escalares $(k_1a + k_2c)$ y $(k_1b + k_2d)$ son los vectores de coordenadas de r con respecto a la base B_2 esto es,

$$[r]B_2 = \begin{bmatrix} k_1a & + & k_2c \\ k_1b & + & k_2d \end{bmatrix}$$

Descomponiendo esta matriz obtenemos:

$$[r]B_2 = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}[r]B_1$$

Se puede ver entonces que $[r]B_2$ se obtiene por el producto de la matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ y la matriz de coordenadas de $[r]B_1$

La matriz por $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ se le representa por P y se llama la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2, por lo tanto, $[r]B_2 = p[r]B_1$

Ejemplo 19. Dadas las bases $B_1 = \{(3,-2),(1,-1)\}$ y $B_2 = \{(-3,-1),(-2,-1)\}$

a) Encuentre la matriz de transición P de B_1 a B_2

b) Encuentre su matriz de coordenadas con respecto a B_2 si v = (2,–3)

Solución

a) Sean:

$$u_1 = av_1 + bv_2 \quad (1)$$

$$u_2 = cv_1 + dv_2 \quad (2)$$

Resolviendo (1)

$$a\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr} -3a & - & 2b & = & 3 \\ -a & - & b & = & -2 \end{array}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $a = -7, b = 9$

Resolviendo (2)

$$c\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{rcrcr} -3c & - & 2d & = & 1 \\ -c & - & d & = & -1 \end{array}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $c = -3, d = 4$

La matriz P solicitada es:

$$P = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

b) La matriz de coordenadas del vector v con respecto a la base B_2 utilizando la matriz de transición P, está dada por $[v]B_2 = P[v]B_1$

Encontremos primeramente la matriz de coordenadas $[v]B_1$. La calculamos a partir de:

$$v = k_1\, u_1 + k_2\, u_2$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones

$$3k_1 \ + \ k_2 \ = 2$$

$$-2k_1 - \ k_2 \ = -3$$

Resolviendo el sistema matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & | & 2 \\ -2 & -1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & | & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Obteniendose como solución

$$k_1 = -1$$

$$k_1 = 5$$

De k_1 y k_2 obtenemos

$$[v]B_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$[v]B_2 = P[v]B_1 = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix} \therefore [v]B_1 \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Otro método para encontrar la matriz de transicion P de la base B_1 a la base B_2 es el que se presenta a continuacion, sean:

$$u_1 = av_1 + bv_2$$

$$u_2 = cv_1 + dv_2$$

$$a \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$c \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Generándose los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} -3a & - & 2b & = & 3 \\ -a & - & b & = & -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3c & & 2d & = & 1 \\ -c & - & d & = & -1 \end{cases}$$

En cada uno de estos sistemas tiene la misma matriz de coeficientes, por lo tanto, se puede representar matricialmente de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] = [B_2|B_1]$$

$$[B_2|B_1]\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right]$$

La matriz obtenida en el lado derecho, es precisamente la matriz P de transición obtenida anteriormente.

$$P = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

De manera general se establece que la matriz aumentada se establece de la siguiente forma.

a) Sea la matriz de transicion P de la base B_1 a la base B_2 entonces $[B_2|B_1]$

b) Sea la matriz de transicion P de la base B_2 a la base B_1 entonces $[B_1|B_2]$

Si P es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2, entonces P^1 es la matriz de transición de a base B_2 a la base B_1 y se representa por Q.

Para hallar la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1 partimos de la relación

$$[v]\, B_2 - P[v]\, B_1 \rightarrow [v]\, B_1 = P^1\, [v]\, B_2$$
$$Q = P^{-1}$$

Haciendo un razonamiento similar al cálculo de P, podemos calcular a Q.

Ejemplo 20. Considere las bases $B_1 = \{(3,-2),(1,-1)\}$ y $B_2=\{(-3,-1),(-2,-1)\}$, encuentre:

a) La matriz de transición $Q = P^{-1}$ de la base B_2 a la base B_1

b) Su matriz de coordenadas con respecto a B_1 si $v = (2, -3)$

Solución

a) La matriz de transición se obtiene a partir de $[B_1 | B_2]$:

$$[B_1|B_2] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & -3 & -2 \\ -2 & -1 & | & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -4 & -3 \\ -2 & -1 & | & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -4 & -3 \\ 0 & -1 & | & -9 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -4 & -3 \\ 0 & 1 & | & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -4 & -3 \\ 0 & 1 & | & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

b) Para encontrar $[v]_{B_1}$, encontremos primeramente la matriz de coordenadas $[v]_{B_2}$, la cual se calcula a partir de

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2$$

$$k_1 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones

$$-\ 3k_1 - 2k_2 = 2$$

$$-3k_1 - k_2 = -3$$

Resolviendo el sistema matricialmente por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & | & 2 \\ -1 & -1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & | & 24 \\ 0 & 1 & | & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -8 \\ 0 & 1 & | & 11 \end{bmatrix}$$

Los valores obtenidos son los siguientes:

$$k_2 = -8$$
$$k_2 = 11$$

La matriz de coordenadas $[v]B_1$, obtenida es:

$$[v]B_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 21. Dadas las bases, $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ y B_2 $\{v_1,v_2,v_3\}$, donde tenemos los vectores $u_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}; v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$; encuentre:

a) La matriz de transición P de B_1 *a* B_2

b) $[v]B_2$ utilizando la matriz P si $[v]\ B_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

Solución

Calculemos la matriz P utilizando:

$$[B_2|B_1]=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&1&1\\1&3&2&\vdots&-2&2&-1\\0&-1&-1&\vdots&1&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&1&1\\0&2&1&\vdots&-3&1&-2\\0&-1&-1&\vdots&1&-2&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&1&1\\0&1&0&\vdots&-2&-1&-2\\0&-1&-1&\vdots&1&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&\vdots&3&2&3\\0&1&0&\vdots&-2&-1&-2\\0&0&-1&\vdots&-1&-3&-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&2&-1&1\\0&1&0&\vdots&-2&-1&-2\\0&0&-1&\vdots&-1&-3&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&2&-1&1\\0&1&0&\vdots&-2&-1&-2\\0&0&1&\vdots&1&3&2\end{bmatrix}$$

La matriz solicitada es:

$$P=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-2&-1&-2\\1&3&2\end{bmatrix}$$

$$[v]_B=P[v]B=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-2&-1&-2\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-5\\2\end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$[v]_{B2}=\begin{bmatrix}5\\-5\\2\end{bmatrix}$$

Ejemplo 22. Dadas las bases $B_1 = \{u_1,u_2,u_3\}$ y $B_2 = \{v_1,v_2,v_3\}$, donde los vectores son $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}; v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$; encuentre

a) La matriz de transición de Q de B_2 a B_1

b) $[v]_{B1}$ utilizando la matriz Q si $[v]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) La matriz de transición P de B_1 a B_2

Solución

Calculemos la matriz Q utilizando

$$[B_1|B_2] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & \vdots & 4 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & \vdots & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & \vdots & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -10 & \vdots & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 7 & \vdots & 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/7 & \vdots & 1/7 & -17/7 & -12/7 \\ 0 & 1 & 10/7 & \vdots & -3/7 & 2/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 23/19 & 43/19 & 11/19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 6/19 & -40/19 & -31/19 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -41/19 & -56/19 & -13/19 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 23/19 & 43/19 & 11/19 \end{bmatrix}$$

La matriz pedida es:

$$Q = \begin{bmatrix} 6/19 & -40/19 & -31/19 \\ -41/19 & -56/19 & -13/19 \\ 23/19 & 43/19 & 11/19 \end{bmatrix}$$

b) Calculamos $[v]_{H_1}$ utilizando la matriz Q

$$[v]B_1 = Q[v]B_2 = \begin{bmatrix} 6/19 & -40/19 & -31/19 \\ -41/19 & -56/19 & -13/19 \\ 23/19 & 43/19 & 11/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16/19 \\ -11/19 \\ 2/19 \end{bmatrix}$$

La matriz calculada es

$$[v]B_1 \begin{bmatrix} -16/19 \\ -11/19 \\ 2/19 \end{bmatrix}$$

c) Calculamos la matriz de transición P, a partir de $[B_2 \,|B_1]$:

$$[B_2|B_1] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & \vdots & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & \vdots & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 & \vdots & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & \vdots & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & \vdots & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & \vdots & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & \vdots & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -15 & -14 & \vdots & 10 & 11 & 17 \\ 0 & -7 & -5 & \vdots & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & \vdots & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 14/15 & \vdots & -2/3 & -11/15 & -17/15 \\ 0 & -7 & -5 & \vdots & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -11/15 & \vdots & 2/3 & -1/15 & 8/15 \\ 0 & 1 & 14/15 & \vdots & -2/3 & -11/15 & -17/15 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -70/69 & -62/23 & -104/23 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -16/207 & -47/23 & -64/23 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 58/207 & 41/23 & 71/23 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -70/69 & -62/23 & -104/23 \end{bmatrix}$$

La matriz solicitada es:

$$P = \begin{bmatrix} -16/207 & -47/23 & -64/23 \\ 58/207 & 41/23 & 71/23 \\ -70/69 & -62/23 & -104/23 \end{bmatrix}$$

Ejercicios propuestos

1. Determine si el conjunto de los números enteros es un espacio vectorial.
2. Determine que el conjunto de las matrices M_{mxn} es un espacio vectorial
3. Considere los vectores $u_1 = (1,-2,1), u_2 = (3,2,-2), u_3 = (-2,1,-1)$, determine si el vector $v = (1, -7, -4)$, puede escribirse como una combinación lineal de vectores u_1, u_2, u_3.
4. Dado el siguiente conjunto de vectores

   $W = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_1 = (3, -1, 2)$, $v_2 = (2,3,1)$, $v_3 = (1, -1, -1)$

   Compruebe si W forma una base de R^3.

CAPÍTULO 5

TRANSFORMACIONES LINEALES

"El resultado lo conozco hace tiempo;
lo que todavía no sé es el camino para llegar a él"
F. Gauss

Antecedentes

El concepto de transformación lineal, es una conceptualización evolucionada que requirió un gran desarrollo en la matemática, en la que se incorporan nociones como función, linealidad, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales, entre otros.

A fines del siglo XVII fueron desarrolladas ideas sobre la linealidad provenientes de los babilonios y de los chinos. Un exponente de ello es Cramer, quien formaliza la escritura para los sistemas de ecuaciones lineales; en su libro *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*, presenta un método para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que poseen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas mediante el uso de determinantes. Es así que hasta el siglo XVIII el álgebra lineal era en esencia el arte de resolver ecuaciones. D'Alembert descubre que las soluciones de un sistema Ax = b forman una variedad lineal; así mismo, Lagrange y D'Alembert se dan cuenta de que la solución general del sistema homogéneo Ax = 0 es una combinación lineal de algunas soluciones particulares. Es la interpretación matricial la que toma posición explícita durante este siglo, y es Frobenius, en su obra *Sobre sustituciones lineales y formas bilineales*, quien hace una valiosa contribución a la teoría de matrices y aporta al desarrollo del concepto de transformación lineal, que venía evolucionando desde el siglo XVIII con los trabajos de Cauchy, Weierstrass y Kronecker, entre otros, y que gracias a Weil adoptaría su forma actual.

Son Hamilton, Cayley y Grassmann los responsables de la axiomatización de las nociones de vector y de espacio vectorial propuestas por físicos de fines del siglo XVII. Además, Grassmann introduce, entre otras, las nociones de producto vectorial y de dimensión de un espacio vectorial, que son algunas de las nociones fundamentales del álgebra lineal como hoy la conocemos. En cuanto a las funciones en la linealidad, es Euler en el siglo XVIII quien propone una notación cercana a la actual —*f(x)*—, pero Haenkel en el siglo XIX establece su definición en forma explícita. En el siglo XX, Klein unifica la geometría, afirmando que ésta es el estudio de un espacio junto con un grupo de transformaciones y de las estructuras que permanecen invariantes en ese grupo. El rol del concepto transformación cambia, constituyéndose en un eje unificador.[4]

5.1. Transformaciones lineales

Concepto de transformación lineal. Sea T una función que efectúa una transformación del espacio vectorial V al espacio vectorial W, la cual se expresa como $T: V \rightarrow W$, donde V es el dominio de T y W es el rango de T.

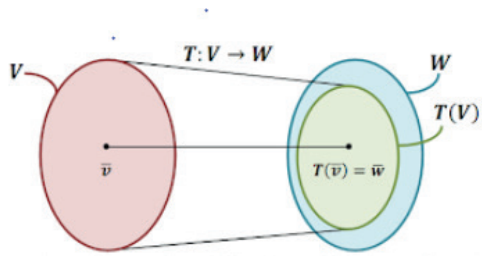
Definición de transformación lineal. La función T es una transformación lineal si para todo $u, v \in V$ y $k \in R$, se cumple:

i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

ii) $T(ku) = kT(u)$

De acuerdo con la definición de la transformación T, se le llama también función o mapeo lineal de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W, le asigna a cada elemento de V un solo elemento de W, como se observa en la Figura 1:

4 Véase Maturana, I. (2015).



Ejemplo 1. Sea *T:* una transformación definida como *T(x, y) = (2x, y).* Determine si *T* es una transformación lineal

Solución

La función *T* será una transformación lineal, si se prueba que las dos condiciones de la definición se cumplen.

Sean $u, v \in R^2$ con $u = (u_1,u_2)$ y $v = (v_1,v_2)$

i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

Calculamos $T(u) + T(v)$

$$T(u) + T(v) = T(u_1,u_2) + T(v_1,v_2) = (2u_1,u_2)+ (2v_1,v_2)$$
$$= (2u_1 + 2v_1, u_2+ v_2) \qquad \ldots \ (1)$$

$$T(u + v) = T[(u_1,u_2) + (v_1,v_2)] = T(u_1 + v_1,u_2 + v_2 = (2(u_1 + v_1), (u_2+ v_2)$$

$$= \ (2u_1 + 2v_1, u_2+ v_2) \qquad \ldots (2)$$

Comparando (1) y (2) se puede observar que se cumple $T(u + v) = T(u) + T(v)$

ii) $T(ku) = kT(u)$

$$T(ku) = T[k(u_1,u_2)] = T(ku_1,ku_2) = (2(ku_1),ku_2) = 2(ku_1,ku_2)$$

Factorizando k, obtenemos

$$k(2u_1,ku_2) = kT(u)$$

Se ha comprobado que ambas condiciones se satisfacen, por lo tanto, podemos concluir que *T* es una transformación lineal.

5.2 Propiedades de las transformaciones lineales

i) $T(0) = 0$

ii) $T(-v) = -T(v)$ para todo $v \in V$

iii) $T(v - w) = T(v) - T(w)$ para todo $v, w \in V$

5.3 Representación matricial de una transformación lineal

Sea T: $R^n \to R^m$ una transformación lineal, decimos que toda transformación lineal se puede representar matricialmente, por medio de $T(x)= Ax;$ donde A es una matriz basada en la transformación línea de orden m x n. La matriz A también es conocida como matriz estándar. Toda transformación matricial es lineal.

Ejemplo 2. Sea T: $R^3 \to R^2$ una transformación definida por la siguiente expresión:

$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & - & 4y & + & z \\ -2x & + & 3y & - & 2z \end{bmatrix}$; encuentre su matriz asociada

Solución

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & - & 4y & + & z \\ -2x & + & 3y & - & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Sea T: $R^3 \to R^2$ una transformación definida por:

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, -2x - 4y + 2z)$$

i) Determine si T es una transformación lineal.

ii) Encuentre la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas de $R^3 \to R^2$

Solución

i) Sean $u, v \in R^3$ con $u = (u_1, u_2, u_3\ )$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$

a) Verificamos si

i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

Calculemos primero $T(u) + T(v)$

$$T(u) + T(v) = (u_1 + 2u_2 - u_3, -2u_1 - 4u_2 + 2u_3) + (v_1 + 2v_2 - v_3, -2v_1 - 4v_2 + 2v_3)$$
$$= u_1 + v_1 + 2u_2 + 2v_2 - u_3 - u_3 - 2u_1 - 2v_1 - 4u_2 - 4v_2 + 2u_3 + 2v_3 \quad \dots \quad (1)$$

Calculemos en segundo lugar $T(u+ v)$

$$T(u + v) = T[(u_1u_2u_3) + v_1v_2\,v_3)] =$$
$$= T[(u_1+ v_1), (u_2 + v_2), (u_3 + v_3)]$$
$$= [(u_1+ v_1) + 2(u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) - 2(u_1 + v_1) - 4(u_2 + v_2) + 2(u_3 + 2v_3)] \ \dots \ (2)$$

Comparando (1) y (2) se puede observar que se cumple $T(u + v) = T(u) + T(v)$

b) $T(ku) = kT(u)$

$$T(ku) = T[k(u_1,u_2,u_3,)] = T(ku_1,ku_2,ku_3,)$$
$$= (ku_1 + 2ku_2 - ku_3,) - 2ku_1 - 4ku_2 + 2ku_3$$

factorizando k, obtenemos

$$= k(u_1 + u_2 - u_3 - 2u_1 - 4u_2 + 2u_3) = kT(u)$$

Por lo tanto, se cumple que $T(ku) = kT(u)$

Dado que ambas condiciones se satisfacen, podemos concluir que T es una transformación lineal.

ii) Para encontrar la matriz asociada a la transformación T, se sustituye la base canónica en la transformación matricialmente, los vectores resultantes forman la matriz asociada.

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}; T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}; T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

$$A_T = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\-2 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. Sea $T{:}M_{22} \rightarrow M_{22}$ una función definida por: $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{bmatrix}$; determine si T es una transformación lineal.

Solución

Sean A = $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ $y\ B = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}$ $\epsilon\ M_{2x2}$

Calculemos primero $T(A)+T(B)$

$$T(A)+T(B) = T\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & d_1^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + a_1^2 & 0 \\ 0 & d^2 + d_1^2 \end{bmatrix} \qquad \dots \quad (1)$$

Calculemos seguidamente *T(A+B)*

$$T(A+B) = T\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} a+a_1 & c+c_1 \\ b+b_1 & d+d_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} (a+a_1)^2 & \\ 0 & (a\ +a_1)^2 \end{bmatrix} \dots (2)$$

Comparando (1) y (2) se puede concluir que $T(u + v) \neq T(u) + T(v)$, es decir, y , por lo tanto, T no es una transformación lineal.

5.4 Cálculo de una transformación lineal

Consideremos la transformación lineal T con base v_1,v_2,v_3 en el espacio vectorial V y los vectores $u_1,u_2,u_3\ \epsilon\ W$, obtenidos bajo esta transformación, calcularemos una expresión para T. Se obtendrá realizando una combinación lineal de un vector v cualesquiera del espacio vectorial V con los vectores dados de V, esto es:

$$v\ = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n \text{ con } k\ \epsilon\ W \qquad \dots \quad (1)$$

A continuación, aplicamos a (1) una transformación lineal y obtenemos:

$$T(v)\ = k_1T(v_1) + k_2T\ (v_2) + \cdots \ldots + k_nT(v_n) \qquad \dots \quad (2)$$

Dada la expresión (2) se obtiene una expresión para *T*. Los *T(v)* son reemplazados por los vectores $u_1,u_2,u_3\ldots,\ u_n,$ de esta manera las únicas incógnitas son las k_n las cuales se obtienen a partir de la expresión (1)

Ejemplo 5. Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación matricial y considere que:
T $\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ =T $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$; $T\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-6\end{bmatrix}$; $T\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-3\end{bmatrix}$; encuentre una expresión para *T*

Solución

Sabemos que $v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$ y $T(v) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + k_3T(v_3)$, con $v = (x,y,z)$.

Calculamos k_1,k_2,k_3 a partir de la combinación lineal siguiente:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}$$

Obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} & k_1 & + & k_2 & - & 2k_3 & = & x\\ - & k_1 & - & 2k_2 & - & 2k_3 & = & y\\ - & k_1 & - & 2k_2 & + & k_3 & = & z\end{bmatrix}$$

Se resuelve el sistema matricial obtenido por el método Gauss-Jordan1

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & | & x\\ -1 & -2 & -2 & | & y\\ -1 & -2 & 1 & | & z\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & | & x\\ 0 & -1 & -4 & | & x+y\\ 0 & -1 & -1 & | & x+z\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -6 & | & 2x+y\\ 0 & -1 & -4 & | & x+y\\ 0 & 0 & 3 & | & -y+z\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -6 & | & 2x+y\\ 0 & 1 & 4 & | & -x-y\\ 0 & 0 & 3 & | & -y+z\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & | & 2x-y+2z\\ 0 & 1 & 4 & | & -x-y\\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-y+z}{3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & | & 2x-y+2z\\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-3x+y-4z}{3}\\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-y+z}{3}\end{bmatrix}$$

Del resultado anterior se obtienen los valores para cada una de la k_i:

$$k_1 = 2x - y + 2z$$

$$k_3 = \frac{-3x + y - 4z}{3}$$

$$k_3 = \frac{-y + z}{3}$$

$$T(\bar{v}) = (2x - y + 2z)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \left[\frac{-3x + y - 4z}{3}\right]\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} + \left[\frac{-y + z}{3}\right]\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6x & -3y & +6z & -3x & +y & -4z & -3y & +3z \\ -4x & +2y & -4z & +6x & -2y & +8z & +y & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & -5y & +5z \\ 2x & +y & +3z \end{bmatrix}$$

La expresión para T es

$$T(\bar{v}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & -5y & +5z \\ 2x & +y & +3z \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

5.5 Núcleo e imagen de una transformación lineal

Existen dos subespacios, el núcleo *(N_t)* o kernel *(ker(T))* y la imagen *(Img(T))* o recorrido *(R_T),* asociados a una transformación lineal. Estos subespacios proporcionan información acerca de las transformaciones lineales, espacios vectoriales y matrices.

Definición de núcleo. Sea T una transformación lineal de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W, es decir, $T: V \rightarrow W$, entonces al conjunto de todos los vectores de V que bajo la transformación T son iguales al vector cero en W, es llamado *núcleo, kernel o espacio nulo* de la transformación T, esto es, $N_T = \{v \in V \mid T(v)=0 \in W\}$.

Toda transformación lineal $T: V \rightarrow W$ tiene otro conjunto asociado conocido como *imagen o recorrido.*

Definición de imagen. Sea un vector $v \in V$ que bajo la transformación T da como resultado un conjunto de vectores $u \in W$ que son sus imágenes, a este conjunto se le conoce como la *imagen de T*, es decir, $Im_T = \{u \in W \mid \exists\ v \in V \ni T(v) = u\}$

Definición de la dimensión o rango. La dimensión de la imagen se representa por $Dim(Im_T)$ y es igual al número de vectores que hay en la base, excepto cuando sólo está el vector cero, en este caso la dimensión será cero.

Definición de la dimensión o nulidad del núcleo. La nulidad del núcleo $Dim(N_T)$ es igual al número de vectores que hay en la base, excepto cuando sólo está el vector cero el cual no es base, en este caso la dimensión es cero.

Ejemplo 6. Sea $T: R_3 \rightarrow R_2$ una transformación matricial definida por

$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & - & 5y & + & z \\ -x & + & 2y & + & 2z \end{pmatrix}$; encuentre

a) Núcleo de T
b) Una base para el núcleo de T
c) La nulidad de T

Solución

a) $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & - & 5y & + & z \\ -x & + & 2y & + & 2z \end{pmatrix} = 0$

De a) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x - 5y + z = 0$$
$$-\ x + 2y + 2z = 0$$

Se resuelve matricialmente el sistema homogéneo por el método de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} x - 12z &= 0 \\ y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales, obtenemos el conjunto solución:

$$\begin{aligned} x &= 12z \\ y &= 5z \end{aligned}$$

Parametrizando, si $z = a$, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= 12a \\ y &= 5a \end{aligned}$$

Obtenemos el vector

$$x = (x, y, z) = (12a, 5a, a)$$

Por lo tanto, el núcleo es

$$N_T = \{x = (12a, 5a, a)\}$$

b) Con el vector x anteriormente calculado, que representa el núcleo, obtenemos una base para el núcleo de T:

   $x = (12a, 5a, a) = a(12, 5, 1)$ como $a \in R$, una base para el N_T es:
   $B_{NT} = \{(12, 5, 1)\}$

c) La dimensión $Dim(N_T) = 1$

Ejemplo 7. Encuentre el recorrido y la dimensión para la transformación lineal $T : R^3 \rightarrow R^2$ definida por:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & - & 5y & + & z \\ -x & + & 2y & + & 2z \end{pmatrix}$$

Solución

Para calcular el recorrido de T, se deben encontrar todos los vectores $u \in R^2$ de forma que bajo la transformación se cumpla $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = u$

Sea $u = (a,b)$ la transformación se establece como $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, al sustituir, la transformación se representa como:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & - & 5y & + & z \\ -x & + & 2y & + & 2z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

De la transformación se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x - 5y + z = a$$

$$-x + 2y + 2z = b$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & | & a \\ -1 & 2 & 2 & | & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & | & a \\ 0 & -1 & 5 & | & a+2b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & -5 & | & -a-2b \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -24 & | & -4a-10b \\ 0 & 1 & -5 & | & -a-2b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 & | & -2a-5b \\ 0 & 1 & -5 & | & -a-2b \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales obtenido se representa como:

$$x - 12z = -2a - 5b$$

$$y - z = -a - 2b$$

El sistema es consistente, por lo tanto, el recorrido es un subespacio bidimensional en R^2, con $R_T = R_2$ y la $Dim\ R_T = 2$

5.6 Rango y nulidad de una transformación lineal

Es importante resaltar que si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal:

a) El núcleo de T es un subespacio de V

b) El recorrido T es un subespacio de W

Definición de rango y nulidad. Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, la dimensión del recorrido de T se llama *Rango* de T y se denota con $Ran(T) = Dim(R_t)$

La dimensión del núcleo de T se llama, *Nulidad* de T y se representa por $N_U(T) = Dim(N_T)$

Teorema 1. Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal de un espacio vectorial V de n—dimensiones a un espacio vectorial W, entonces, el $Ran(T) + N_U(T) = n$, esto es, $Dim(R_T) + Dim(N_T) = n$

Ejemplo 8. Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ una transformación lineal definida por:

$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - 3y + z, 5x - 4y + z);$ encuentre

a) Una base y la dimensión para el núcleo T

b) Una base y la dimensión para el recorrido de T

Solución

a) Para calcular una base para el núcleo se debe cumplir $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$, es decir, $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Planteamos entonces el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo a partir de $T(x, y, z)$

$$\begin{aligned} x \quad +12y \quad - z &= 0 \\ 2x \quad -3y \quad + z &= 0 \\ 5x \quad -4y \quad + z &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema homogéneo matricialmente por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 5 & -4 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -7 & 3 & | & 0 \\ 0 & -14 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/7 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es consistente y los valores obtenidos del sistema de ecuaciones son:

$$x = \frac{1}{7}z$$

$$y = \frac{3}{7}z$$

Parametrizando, si $z = a$, tenemos que:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{7}a, \frac{3}{7}a, a\right)$$

El núcleo de T está dado por

$$N_{T=}\left\{(x, y, z) = \left(\frac{1}{7}a, \frac{3}{7}a, a\right)\right\}$$

Del núcleo de la transformación se pueden obtener infinito número de bases:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{7}a, \frac{3}{7}a, a\right) = \frac{a}{7}(1,3,7)$$

La base obtenida será $(N_T) = \{(1,3,7)\}$ y la dimensión $D_T = 1$

b) Se calcula, en primer lugar, el recorrido; para obtenerlo se deben encontrar todos los vectores $u \in R^3$ de tal forma que bajo la transformación $T = u$; sea $u = (a,b,c)$

entonces $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, esto es,

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= a \\ 2x - 3y + z &= b \\ 5x - 4y + z &= c \end{aligned}$$

La imagen estará dada por todos los vectores $u \in R^3$ que permiten que el sistema de ecuaciones lineales sea consistente.

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 2 & -3 & 1 & | & b \\ 5 & -4 & 1 & | & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & -7 & 3 & | & -2a+b \\ 0 & -14 & 6 & | & -5a+c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & 1 & -3/7 & | & \dfrac{2a-b}{7} \\ 0 & 0 & 0 & | & -a-2b+c \end{bmatrix}$$

El sistema será consistente si $a + 2b - c = 0$

Para determina el rango de T, se considera la ecuación resultante $-a - 2b + c$ y despejamos a, obteniendose $a = -2b + c$. Parametrizando, si $b = s$ y $c = t$ obtenemos:

$$R_T = \{(a,b,c) = (-2s + t,s,t)\}$$

Una base para el recorrido se puede obtener de:

$$(a, b, c) = (-2s + t, s, t) = s(-2, 1, 0) + t(1, 0, 1)$$

La base obtenida es $(N_T) = \{s(-2, 1, 0) + t(1, 0, 1)\}$ y la dimensión (D_T) es 2

Ejemplo 9. Sea $T: R^4 \rightarrow R^3$ una función definida por:

$T(x, y, z, w) = (3x-2y + z - w, -2x + 3y + z + 4w, 6x - 5y + z - 4w)$; encuentre

a) una base y la dimensión para el recorrido de T

b) una base y la dimensión para el núcleo de T

Solución

a) Para el cálculo del recorrido, debemos encontrar todos los vectores $u \in R^3$ y que bajo la transformación $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = u$. Sea $u = (a, b, c)$, entonces $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, esto es

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z - w &= a \\ -2x + 3y + z + 4w &= b \\ 6x - 5y + z - 3w &= c \end{aligned}$$

Recordando, la forma del sistema de ecuaciones es $Ax = B$ y su representación queda formalizada de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz asociada está dada por la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

La base de la imagen estará dada por todos los vectores $u \in R^3$ que hacen que el sistema de ecuaciones anterior sea consistente.

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales matricialmente por el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 & a \\ -2 & 3 & 1 & 4 & b \\ 6 & -5 & 1 & -4 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & \frac{2a+3b}{5} \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2a+c \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{2a+3b}{5} \\ 0 & 0 & -10 & -20 & \frac{28a+27b-5c}{5} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{2a+3b}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-8a+3b+5c}{5} \end{array}\right]$$

El sistema de ecuaciones será consistente si se cumple que: $\frac{-8a+3b+5c}{5} = 0$

Despejando a de la ecuación anterior, obtenemos $a = \frac{1}{8}(3b + 5c)$

Parametrizando, si $b = s$ y $c = t$, obtenemos $a = \frac{1}{8}(3s + 5t)$, obtenemos el recorrido de T

$$Rec(T) = (a, b, c) = \left\{\left(\frac{1}{8}(3s + 5t), s, t\right)\right\}$$

Una base para la imagen se puede obtener de la manera siguiente

$$(a, b, c) = (\frac{1}{8}(3s + 5t), s, t) = \frac{s}{8}(3,8,0) + \frac{t}{8}(5,0,8)$$

La base calculada para (R_T) ={ (3,8,0), (5,0,8)} y la dimensión (D_T) es 2.

b) Para calcular la base para el núcleo se debe cumplir que: $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$, es decir, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, lo que permite confirmar el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z - w &= 0 \\ -2x + 3y + z + 4w &= 0 \\ 6x - 5y + z - 3w &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones homogéneo comparte la misma matriz asociada A del sistema no homogéneo de la imagen. La diferencia radica en que la matriz aumentada generada por el sistema homogéneo, sustituye la matriz columna de las constantes, por un vector cero.

Resolviendo este sistema homogéneo matricialmente por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 & | & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & | & 0 \\ 6 & -5 & 1 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + z + w &= 0 \\ y + z + 2w &= 0 \end{aligned}$$

Despejando las variables x e y del sistema anterior obtenemos:

$$x = -z - w$$
$$y = -z - 2w$$

Parametrizamos, si $z = t$ y $w = q$ entonces el vector x, y:

$$x = -t - q$$
$$y = -t - 2q$$

De esta forma, el núcleo estará dado por

$$N_T = \{(x,y,z,w) = (-t-q,-t-2q,t,q)\}$$

Una base para el núcleo estará dada por:

$$(x,y,z,w)=(-t-q,-t-2q,t,q) = t(-1,-1,1-0) + q(-1,-1,1,0)$$

La base obtenida será $B_{N(T)} = \{(-1,-1,1-0), (-1,-1,1-0)\}$ y la dimensión (D_T) es 2.

Teorema 2. Si $T{:}V \rightarrow W$ es una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión finita a un espacio vectorial W, entonces la $Dim(V) = Dim(Im(T)) + Dim(N_T))$

a) Apliquemos el Teorema 2, al sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ 5x - 4y + z &= 0 \end{aligned}$$

b) Como punto de partida, encontraremos una base para el núcleo y para esto se debe cumplir que $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$, es decir, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, lo que permite confirmar el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ 5x - 4y + z &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones homogéneo matricialmente por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 5 & -4 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -7 & 3 & | & 0 \\ 0 & -14 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/7 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es consistente y nos permite obtener las soluciones:

$$x = \frac{1}{7}z$$

$$y = \frac{3}{7}z$$

Parametrizando, si $z = a$, tenemos que:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{7}a, \frac{3}{7}a, a\right)$$

El núcleo de T está dado por

$$\mathrm{N_T} = \left\{(x, y, z) = \left(\frac{1}{7}a, \frac{3}{7}a, a\right)\right\}$$

Del núcleo de la transformación se obtienen las bases:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{7}a, \frac{3}{7}a, a\right) = \frac{a}{7}(1,3,7)$$

La base obtenida es $(N_T) = \{(1,3,7)\}$ y la dimensión $\mathrm{D_T}$ es 1.

b) Utilizando el teorema de la dimensión

$Dim(V) = Dim(R(T)) + Dim(N_T)$

De lo cual deducimos

$Dim(R(T)) = Dim(V) - Dim(N_T) = 3 - 1 = 2$

Por lo tanto, la dimensión de la imagen será: $Dim(R(T)) = 2$. Es decir, el recorrido es un subespacio bidimensional de R^3.

Una base para el recorrido de T se obtiene de forma general a partir del siguiente procedimiento:

De acuerdo con la dimensión de la imagen, la cual es n, una base tendrá n vectores en R^n. Se obtienen del sistema de ecuaciones homogéneo que permite obtener el núcleo, para lo cual se considera la primera columna como el primer vector, seguida de la segunda columna como el siguiente vector, es importante mencionar que estos vectores deben cumplir con ser linealmente independientes, si dichos vectores no son independientes, se considerará la siguiente columna y se verifica nuevamente su independencia y así sucesivamente.

En el caso de nuestro ejemplo, la dimensión de la imagen es *2*, por lo cual, una base tendrá dos vectores en R^3, obteniéndose la *Base(R(T)) = {(1,2,5),(2,-3-4)}*

Ejercicios propuestos

1. Sea T: $R^3 \to R^2$ una transformación definida por la siguiente expresión:

   $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x & + & 8y & - & 2z \\ 6x & - & 9y & + & 6z \end{bmatrix}$; encuentre su matriz asociada

2. Sea T: $R^3 \to$ R una transformación definida como: $T(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; determine si T es una transformación lineal.

3. Sea T: $R^3 \to R^2$ una transformación matricial y considere que:

   $T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; encuentre la expresión para T

4. Sea T: $R^3 \to R^2$ una transformación matricial definida por

   $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & + & 3y & - & z \\ 2x & - & 4y & - & 4z \end{pmatrix}$; encuentre

   a) Núcleo de T
   b) Una base para el núcleo de T
   c) La nulidad de T

CAPÍTULO 6

VALORES, VECTORES CARACTERÍSTICOS Y DIAGONALIZACIÓN

Un matemático que no es también algo de poeta nunca será un matemático completo.
Karl Weierstrass

Antecedentes[5]

El problema de la determinación algebraica de valores propios surgió en el siglo XVIII a partir del estudio de sistemas mecánicos discretos.

El tema de los valores propios apareció cuando Euler, en el primer tercio del siglo XVIII, estudió sistemáticamente la ecuación general de segundo grado en dos y tres variables en el plano y en el espacio respectivamente. Demuestra que existen unos ejes perpendiculares donde la expresión de la cónica o cuádrica es especialmente sencilla. Posteriormente en 1760 en su libro *Recherches sur la courbure des surfaces*, al estudiar las secciones normales de una superficie en un punto encuentra que hay dos planos mutuamente ortogonales cuyas secciones proporcionan las curvas de máxima y mínima curvatura. Posteriormente se vio que estas dos situaciones son casos particulares del hecho de que una matriz simétrica sea ortogonalmente diagonalizable. La noción de polinomio característico aparece explícitamente en el trabajo de

5 Véase Benítez, J. (2007).

Lagrange sobre sistemas de ecuaciones diferenciales en 1774 y en el trabajo de Laplace (1749-1827) en 1775.

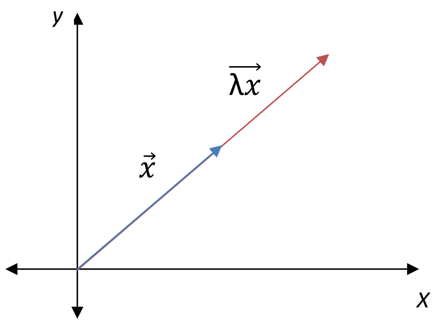
Su aparición, sin embargo, no resulta sorprendente ya que el estudio de formas cuadráticas existía desde la segunda mitad del siglo XVII; Leibniz había mostrado un gran interés en el estudio de sistemas de ecuaciones y sistemas de formas cuadráticas y estos temas son los que eventualmente darían lugar a una teoría de matrices. Desde mediados del siglo XVIII, el surgimiento de esta teoría era ya claro, especialmente en los trabajos de D'Alembert y Lagrange dedicados a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias vinculadas al conocido problema de la cuerda vibrante 1. Sin embargo, los métodos matemáticos relacionados con estos problemas permanecieron subordinados al aspecto mecánico de estos durante algún tiempo. Fue hacia la segunda mitad del siglo XVIII, que tanto Lagrange como Laplace se vieron obligados −siempre motivados por la teoría física− a profundizar en el estudio matemático de los valores propios. Estos trabajos tuvieron una gran influencia sobre el trabajo de Cauchy.

Cauchy reconoció el problema del valor propio en la obra de Euler, Lagrange y Laplace. En 1826 tomó el problema de la reducción de la forma cuadrática en tres variables y demostró que la ecuación característica es invariante para cualquier cambio en los ejes rectangulares, en lenguaje moderno, si A es una matriz cuadrada y si S es invertible, entonces $\det(A - \lambda I) = \det(SAS^{-1} - \lambda I)$. En 1829 Cauchy prueba que los valores propios de una matriz simétrica son reales. Las matrices hermíticas (A = At) fueron introducidas por Hermite (1822-1901). Frobenius en 1878 prueba la diagonalizabilidad de las matrices ortogonales, extendiendo en 1883 la demostración a matrices unitarias ($AA^t = I$). El teorema espectral para matrices normales ($AA^t = A^tA$) se debe a Toeplitz (1881-1940).

Jacobi (1804-1851) dio la solución del sistema de ecuaciones diferenciales $Y_0 = AY$, siendo A una matriz diagonalizable. Jordán resolvió el caso no diagonalizable usando los conceptos de matrices similares (dos matrices A y B se dicen similares si existe una matriz invertible S tal que $A = (SBS^{-1})$ y de ecuación característica). En el libro *Traité des substitutions* (1870) demostró que una matriz puede ser transformada a una forma canónica hoy llamada forma canónica de Jordán. Un paso simultáneo hacia el concepto de valor y vector propio en un espacio vectorial abstracto lo dieron Sturm y Liouville al estudiar las ecuaciones que hoy llevan su nombre. Observaron que si φ es cierto operador diferencial, entonces existe una sucesión de valores λn tales que existen funciones yn no nulas ortogonales entre sí verificando φ (yn) = λnyn.

6.1. Valores y vectores característicos

De manera general, la imagen de un vector bajo una transformación de un espacio vectorial en sí mismo no es un vector paralelo al vector inicial, existen vectores especiales para los cuales la acción de la transformación es muy sencilla: el vector y su imagen tienen la misma dirección. Estos vectores especiales se le conoce con el nombre de vectores propios y permiten un análisis sencillo de la transformación puesto que en la dirección de ellos, la transformación sólo se "encogen" o "expanden" los vectores.



Los valores y vectores propios son una herramienta que permite obtener la diagonalización de matrices, son utilizados en algunas aplicaciones como: los modelos de crecimiento económico, crecimiento de la población y en diversas áreas como la ingenieria y la física, entre otras.

Definición de valores y vectores propios. Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces un vector diferente de cero $x \in R^n$ es un vector propio de A si Ax es un multiplo escalar de x esto es:

$$Ax = \lambda x$$

A la letra griega lambda (λ) se le llama *valor propio* de A. Resulta importante establecer que se plantean valores propios, pertenecientes al conjunto de los números reales. Los *valores y vectores propios* son también llamados *valores y vectores característicos* y del alemán *eingen valor* y *eigen vector*, respectivamente (*eigen* significa *propio*).

Para determinar los valores propios y vectores propios de una matriz cuadrada de orden n, se parte de la ecuación:

$$Ax = \lambda x$$

Esta ecuación se puede expresar

$$Ax = \lambda \mathrm{I} x$$

Igualando a cero y factorizando x se obtiene:

$$(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0 \qquad \text{o} \qquad (A - \lambda \mathrm{I})x = 0$$

La solución de este *sistema homogéneo* permite obtener soluciones diferentes de cero, si y sólo si, la matriz de coeficientes $(\lambda \mathrm{I} - A)$ no es invertible, o con soluciones no nulas, lo cual sucede si:

$$det\,(A - \lambda \mathrm{I})x = 0$$

*Teorema 1***.** Sea A una matriz cuadrada

1. Un escalar λ es un valor propio de A, si y sólo si

$$det\,(\lambda \mathrm{I} - A) = 0 \text{ y, } \lambda \in \mathrm{R}$$

2. Un vector x es un vector propio de A asociado a un valor propio de λ, si y sólo si, x es una *solución no trivial* del sistema

$$(\lambda \mathrm{I} - A)\, x = 0$$

La ecuación $(\lambda \mathrm{I} - A)\, x = 0$ se llama *ecuación caradterística* de A. El polinomio que se obtiene de resolver el determinante de esta ecuación, se le conoce como polinomio característico de A, el cual se representa como:

$$P\,(\lambda) = det\,(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$$

Esto quiere decir, que los valores propios de una matriz cuadrada A_n corresponden a las raíces del polinomio caracteristico de la matriz A.

Teorema 2. Una matriz A es invertible, si y sólo si, *0* no es un valor propio de A.

6.2 Procedimiento para obtener los valores y vectores propios

Dada A una matriz cuadrada de orden n,

Paso 1. Se resuelve la ecuación caracerística de grado n en la variable λ

$$P(\lambda) = det(\lambda I - A)x = 0$$

Paso 2. Se determinan las raíces reales de la ecuación característica, que llamaremos valores propios

$$\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 \ldots\ldots\ldots\ \lambda_n \text{ de A}$$

Paso 3. Se resuelve el sistema homogéneo para cada λ y se calculan los vectores característicos

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Ejemplo 1. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Se resuelve la ecuación caracerística: $det(\lambda I - A)x = 0$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 3) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

Paso 2. Se determinan las raíces reales o valores propios

$$\lambda = 4$$
$$\lambda = 2$$

Paso 3. Se resuelve el sistema homogéneo para encontrar los vectores propios y se calcula el espacio solución de

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

Con el primer valor característico obtenido, λ=4, calculamos (A – λI)

$$\lambda I - A = 4I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con la matriz obtenida evaluamos el sistema $(\lambda I - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

el sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{bmatrix} x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales matricialmente por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \ldots \sim \ldots \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos los valores correspondientes a las variables x

$$x_1 = x_2$$

dado que es un sistema linealmente dependiente, parametrizamos asignando cualesquiera valor a la variable independiente

$$si\ x_2 = a$$

Obtenemos

$$x_1 = a$$

de esta forma, obtenemos el valor propio asociado

$$x = (x_1\ x_2) = (a,a) = a(1,1)$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con el segundo valor característico obtenido, λ = 2, calculamos (A – λI)

$$\lambda I - A = 2I - A \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

con la matriz obtenida evaluamos el sistema $(\lambda I - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

el sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{bmatrix} -x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales matricialmente por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \dots \sim \dots \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos los valores correspondientes a las variables x

$$x_1 = -x_2$$

dado que es un sistema linealmente dependiente, parametrizamos asignando cualesquiera valor a la variable independiente

$$si \quad x_2 = -a$$

obtenemos

$$x_1 = -a$$

de esta forma, obtenemos el vector propio asociado

$$x = (x_1, x_2) = (-a, a) = a(-1,1)$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Dada la matriz

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre los valores y vectores propios.

Solución

i) Cálculo de valores propios, a partir de $det(\lambda I - A) = 0$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 7 \\ 0 & \lambda & 9 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 7 \\ 0 & \lambda & 9 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 7 \\ 0 & \lambda & 9 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2) = 0$$

Los valores propios calculados son:

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 2$$

Cálculo de vectores propios, a partir del espacio solución de $(\lambda I - A)x = 0$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -7 \\ 0 & \lambda & 9 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

Con la primer componente obtenida, $\lambda = 0$

$$\lambda I - A = 0I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Igualando a cero, obtenemos $(\lambda I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

del sistema de ecuaciones resultante, obtenemos los valores correspondientes a las variables

$$-7x_3 = 0$$
$$9x_3 = 0$$
$$-2x_3 = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones homogéneo matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \ldots \sim \ldots \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

obtenemos

$$x_3 = 0$$

$$si \quad x_1 = a \quad \text{y} \quad x_2 = b$$

entonces

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (\text{a,b,0}) = a(1,0,0) + b(0,1,0)$$

los vectores propios asociados:

$$p_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Con la segunda componente obtenida, λ=2

$$\lambda \mathrm{I} - A = 2I - A = \begin{bmatrix}2 & 0 & -7\\0 & 2 & 9\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Igualndo a cero, obtenemos $(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -7\\0 & 2 & 9\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0$$

el sistema de ecuaciones resultante, obtenemos los valores correspondientes a las variables

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad\quad - 7x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones homogéneo matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -7 & | & 0\\0 & 2 & 9 & | & 0\end{bmatrix} \ldots\sim\ldots \begin{bmatrix}1 & 0 & -7/2 & | & 0\\0 & 1 & 9/2 & | & 0\end{bmatrix}$$

Obtenemos de la primera ecuación

$$x_1 = \frac{7}{2}x_3$$

Parametrizando $x_3 = c$

$$x_1 = \frac{7}{2}c$$

Obtenemos de la segunda ecuación

$$x_2 = -\frac{9}{2}x_3$$

$$x_2 = -\frac{9}{2}c$$

Obtenemos entonces

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{2}c, \frac{9}{2}c, c\right) = \frac{c}{2}(7, -9{,}2)$$

y el vector propio asociado es:

$$p_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6.3 Diagonalización

Definición de diagonalización. Dada una matriz A es diagonalizable, si y sólo si, existe una matriz diagonal D semejante a la matriz A. Existe una matriz P invertible y D una matriz diagonal, tal que se cumpla $AP = PD$, es decir, que se cumple que $P^{-1} AP = D$.

Al procedimiento para encontrar la matriz diagonal invertible P y la matriz D, lo llamamos *proceso de diagonalización* y diremos que ambas matrices diagonalizan a la matriz A.

Teorema 3. Sea A una matriz cuadrada de orden n,

a) A es diagonalizable, si y sólo si, tiene *n vectores propios linealmente independientes*

b) Si A es diagonalizable con $P^{-1} AP = D$ entonces las columnas de P son *vectores propios,* lo cual se representa de la siguiente forma:

c) $P = [P_1, P_2 \ldots\ldots P_3]$ y $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$

6.4 Procedimiento para diagonalizar una matriz

1. Obtener los valores propios a partir de la ecuación característica P (λ) = $det(\lambda I - A)x = 0$
2. Obtener los vectores propios correspondiente a cada valor propio
3. Construir la matriz P de vectores propios
4. Comprobar que P es invertible
5. Obtener D utilizando la relación $D = P^{-1} AP$

Ejemplo 3**.** Encuentre una matriz P que diagonalice la matriz A y verifique que en efecto $D = P^{-1}AP$, es una matriz diagonal para:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

Obtenemos los valores propios, resolviendo la ecuación característica *det*(λI – A) = 0

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

Se resuelve la ecuación característica

$$(\lambda - 4)^2 = 0$$

El valor propio calculado es:

$$\lambda = 4$$

Sólo existe un valor propio, sin embargo, un valor propio puede tener asociado más de un vector propio.

Se obtienen los vectores propios correspondientes a cada valor propio.

Si $\lambda = 4$

$$\lambda I - A = 4I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

Ahora de $(\lambda I - A)x = 0$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones homogéneo matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

entonces $x_1, x_2 \epsilon R$.

Parametrizando obtenemos:

Si $x_1 = a, \quad x_2 = b$

$$x = (x_1\ x_2) = (a, b) = a(1,0) + a(0,1)$$

Los vectores propios son:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz P de vectores propios

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz P es igual a la matriz identidad *($P = I$)*

De esta manera, encontramos la matriz *D,* utilizando la relación $P^{-1}AP$ y las propiedades de la matriz inversa

$$D = P^{-1}AP = I^{-1}AI = A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4. Determine si la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución

Se calculan los valores propios

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 & -5 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & -5 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$
$$\lambda = 0$$
$$\lambda = 1$$
$$\lambda = -2$$

Los valores caracerísticos obtenidos son diferentes entre sí y de acuerdo con el *Teorema 3*, podemos concluir que la matriz A es diagonalizable. Otro punto a resaltar, es que si la matriz A es triangular, los valores propios serán los valores que se encuentran en la diagonal principal.

Ejemplo 5**.** Encuentre una matriz P que diagonalice la matriz A y verifique que $D = P^{-1} AP$ es una matriz diagonal para:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución

De acuerdo con la definición de matriz diagonal, observamos que la matriz *A,* cumple con esas características, por lo tanto, sus valores propios son los elementos que están en su diagonal principal

$$\lambda = 0$$
$$\lambda = 1$$
$$\lambda = -2$$

Se encuentran los vectores propios correspondientes a cada valor propio, calculando el espacio solución de $(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$

Con el primer valor característico, $\lambda=0$, obtenemos el primer vector caracterítico

$$\lambda \mathrm{I} - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 & -5 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda \mathrm{I}\text{-}A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -x_1 \quad -x_2 \quad -5x_3 &= 0 \\ -x_3 &= 0 \\ 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones homogéneo matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \ldots \sim \ldots \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \ldots \sim \ldots \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Los componentes del vector $x = (x_1,x_2, x_3)$ son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Parametrizando, si $x_2 = a$ entonces $x_1 = -3a$, de lo cual obtenemos:

$$x = (x_1,x_2, x_3) = (-3a,a,0)$$

Por lo tanto, el vector característico asociado es

$$P_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el segundo valor caracteístico, λ=1, obtenmos el segundo eigenvector

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 & -5 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Obteniendose el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -3x_2 - 5x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones homogéneo matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Parametrizando si $x_1 = a$

$$x_1 = \text{a}$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$

Obtenemos

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (\text{a},0,0) = \text{a}(1,0\ 0)$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el tercer eigenvalor, λ= –2, obtenemos el tercer eigenvector

$$\lambda \mathrm{I} - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 & -5 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Obteniendose el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -3x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones homogéneo matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 0 & -7 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/6 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Transformando el resultado, obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \frac{7}{6}x_3 &= 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos los componentes del vector x = (x_1, x_2, x_3)

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{7}{6}x_3 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

Paramatrizando $x_3 = a$, obtenemos

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{6}\mathrm{a}, \frac{1}{2}\mathrm{a}, \mathrm{a}\right) = \frac{\mathrm{a}}{6}(-7, -3{,}6)$$

$$p_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Se construye la matriz P, a partir de los vectores propios obtenidos

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de la matriz P

$$[P\,|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 9 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & -9/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 16/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 16/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 3 & 16/6 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 6 & 18 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore$$

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 6 & 18 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 6 & 18 & 16 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

La matriz D obtenida es:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6. Encuentre una matriz P (si existe) que diagonalice la matriz A y verifique que en efecto $D = P^{-1} AP$ es una matriz diagonal si:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Como A es una matriz triangular, los valores propios son los elementos de la diagonal principal

$$\lambda = 7$$

$$\lambda = 2$$

Se encuentran los vectores propios correspondientes a cada valor propio, calculando el espacio solución de $(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$

Para el primer valor característico, $\lambda = 7$, obtenemos el primero y segundo eigenvector

$$\lambda \mathrm{I} - A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned} 2x_3 &= 0 \\ -\ 4x_3 &= 0 \\ -\ 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos los componentes del vector $x = (x_1,x_2,x_3)$

$$x_1 = a$$
$$x_2 = b$$
$$x_3 = 0$$

$$x = (x_1,x_2,x_3) = (a,b,0) = a(1,0,0) + b(0,1,0)$$

Los vectores propios asociados son

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; y \; p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el segundo valor característico, $\lambda = 2$, obtenemos el tercer vector característico

$$\lambda \mathrm{I} - A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} - & 5x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & - & 5x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales matricialmente por el método Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -5 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/5 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \frac{2}{5}x_3 &= 0 \\ x_2 + \frac{4}{5}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{5}x_3 \\ x_2 &= -\frac{4}{5}x_3 \end{aligned}$$

Parametrizando $x_3 = \text{a}$, obtenemos los componentes del vector $x = (x_1,x_2,x_3)$

$$x = (x_1 x_2 x_3) = \left(\frac{2}{5}\text{a}, -\frac{4}{5}\text{a}, \text{a}\right) = \frac{\text{a}}{5}(2, -4,5)$$

El valor propio asociado es

$$p_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Se forma la matriz P de vectores propios

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de la matriz *P*

$$[P\,|I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & -4 & | & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

De esta forma obtenemos la matriz D:

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios propuestos

1. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre los valores y vectores propios

2. Encuentre una matriz P que diagonalice la matriz A y verifique que $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal si:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -2 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

3. Encuentre una matriz P (si existe) que diagonalice la matriz A y verifique que en efecto $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal si:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Determine si la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFÍA

Anton, H. (1994); "Elementary Linear Algebra. Elementary Linear Algebra Applications (Applications Version)". 7ª edición. John Wiley & Sons Ltd.

Anton, H. (1994); "Elementary Linear Algebra. Elementary Linear Algebra Applications (Solution Students)". 7ª edición. John Wiley & Sons Ltd.

Anton, H. (1994); "Elementary Linear Algebra. Elementary Linear Algebra Applications". 7ª edición. John Wiley & Sons Ltd.

Banchoff, T., Wermer, J. (1993); "Linear Algebra Thourgh Geometry". 2ª ed. Springer-Verlag.

Barbolla, R., Sanz, P. (1998); "Álgebra lineal y Teoría de Matrices". Prentice Hall.

Barrios, J., González, C., Moreno, J. (1993); "Álgebra Matricial para Economistas". Editorial AC.

Blanco, S., García, P., Del Pozo, E. (2002); "Matemáticas empresariales I. Vol. 1 Álgebra Lineal". Editorial AC.

Brickell. (1974); "Matrices y espacios vectoriales". Limusa. Selección de problemas resueltos Serie Limusa, nº 8.

Bugrov, Y., Nikolski, S. (1984); "Matemáticas Superiores. Elementos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica". Mir Moscú.

Bundick, F. (1990); "Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales"; Edit. McGraw Hill, 3ª Edición, 6.

Cancelo, J., López, J., González, C., Montero, J. (1987); "Problemas de Álgebra Lineal para economistas I". Tebar Flores, Madrid.

Cancelo, J., López, J., González, C., Montero, J. (1987); "Problemas de Álgebra Lineal para economistas II". Tebar Flores, Madrid.

Cardano, G. (1545), "Artis Magnae, sive de regulis algebraicis", Núremberg, Petreius.

Cauchy, A. (1815); "Mómoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs &gales et de signes contraires par suite des transpositions...," Jl. EC. Poly. t.lO, cah.17 = Oeuvres (2)1, 91-169.

Cramer, G. (1750). "Introduction à L'analyse des Lignes Courbes Algébriques". F Cramer & Cl Philibert.

Criado, R., Bujosa, A., Hernández, M. (1993); "Álgebra Lineal. Método, fundamentos y algoritmos". Editorial AC.

Curtis, C. (1993); "Linear Algebra; An Introductory Approach". 4ª edición. Springer-Verlag.

De Gracia, R., Santos, J. (2019). "Evolución histórica y conceptual de las matrices". Trabajo monográfico de Licenciatura. Facultad de ciencias naturales, exactas y tecnología. Escuela de docencia en matemática. Changuinola, Bocas del Toro.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 No. 2 (2006), pp. 153–170

Dorf. (1988); "Introducción al álgebra de matrices". Limusa, Trillas.

D´Alembert, J. (1751-1772). Encyclopedie o Dictionaire raisonné des sciences, des arts et des metiers.

Díaz, J. (1991); "Matrices. Diagonalización. Formas Canónicas". Tebar Flores.

Díaz, J. (2001); "Espacios Vectoriales y Estructuras Fundamentales del Álgebra". Tebar Flores.

Edwards, C., Penney, E. (1988); "Elementary Linear Algebra". Prentice Hall International Paperback. 13-258245-7.

Filloy. (1970); "Introducción al álgebra lineal". Limusa, Trillas.

Freidberg, H., Insel, J., Spence, E. (1990); "Linear Algebra". 2ª ed. Prentice Hall International Paperback. 13-536855-3.

Cramer, G. (1750), "Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques", Universidad de Lausanne

García, J., López, M. (1992); «Álgebra lineal y geometría». 8ª edición. Marfil, Alcoy.

Gauss, C. (1801). "Disquisitiones Arithmeticae". Lipsiae (Leipzig), Germania (Alemania): Commissis apud Gerh. Fleische.

Gerber, H. (1992); "Álgebra Lineal". Díaz de Santos.

Golovina. (1974); "Álgebra Lineal y alguna de sus aplicaciones". Mir Moscú.

Golubitsky, M., Dellhitz, M. (2001); "Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales con uso de Matlab". Thomson.

Goode, S. (1991); "Introduction to Differential Equations and Linear Algebra". Prentice Hall International Paperback Edition.

Granero, F., Rebollo, C., Hormaza, M. (2001); "Álgebra Lineal". Prentice Hall.

Griffel, D. (1989); "Linear Algebra and Its Applications. Volume 1". Ellis Horwood. 13-538646-2.

Griffel, D. (1989); "Linear Algebra and Its Applications. Volume 2". Ellis Horwood. 13-538661-6.

Grossman, S. (2012). Álgebra Linear. 7ma. Ed. Trad. Español por Flores, G.J. Mc Graw Hill: Universidad Iberoamericana.

Guerrero, F., Vázquez, M. (1998); "Manual de Álgebra Lineal para la Economía y la Empresa". Pirámide, Madrid.

Gutiérrez, S. (1993); "Álgebra lineal para la Economía". 2ª edición. Editorial AC.

Gutiérrez, A., García, F. (1990); "Álgebra lineal". Tomo 2. Pirámide, Madrid.

Heras, A., Vilar, J. (1988); "Problemas de Álgebra Lineal para la Economía". Editorial AC.

Herstein, I., Winter. (1989); "Álgebra lineal y teoría de matrices". Díaz de Santos.

Hoffmann, L., Gerald, L. (1994); "Calculo Aplicado para la Administración, Contaduría y Ciencias Sociales"; 5ª Edición, Edit. McGraw Hill; Colombia; 2.

Ikrámov, J. (1990); "Problemas de Álgebra Lineal". Mir Moscú.

James, D. (1973); "Introduction to Quantitative Methods in Economics"; John Wiley & Sons, Australasia Pty.Ltd. Australia 1993 4.

Klein, F. (1996); "On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences". In: Ewald, W. (Ed.).

Kolman, B. (1999); "Álgebra Lineal con MATLAB". Prentice Hall.

Kostrikin. (1983); "Introducción al Álgebra". Mir Moscú.

Landesman, E., Hestenes, M. (1992); "Linear Algebra". Prentice Hall International Paperback. 13-534967-2.

Lang, S. (1993); "Introduction to Linear Algebra". 2ª edición. Springer-Verlag.

Lang, S. (1993); "Linear Algebra". 3ª edición. Springer-Verlag.

Laplace. (1772) "Recherches sur le Calcul Intégral et sur le Systeme du Monde", Mém. Acad. Paris, 1772 part 2 (1776), pp.267-376

Larson, R. (2004); "Álgebra lineal". Pirámide.

Lay, D. (2001); "Álgebra Lineal y sus aplicaciones". Prentice Hall.

Leibniz, G. (1684) "Nova Methodus pro Máxima et Minimus". Acta Eruditorum, 467-473.

León, S. (1993); "Álgebra Lineal con aplicaciones".

Lütkepohl, H. (1996); "Handbook of Matrices". John Wiley & Sons Ltd.

Martínez, F. (2015). Curso de Álgebra Linear, Teoría con aplicaciones a la Economía. 2da. Ed. México: UNAM.

Maturana, I. (2015). "Transformaciones Lineales: Un Estudio Desde la Teoría APOE. Tesis de doctorado. Valparaíso, CHILE".

Meyer, C., Plemmons, R. (1993); "Linear Algebra, Markov Chains, and Queueing Models".

Muñoz, F., Devesa, J., Mocholí, M., Guerra, J. (1988); "Manual de Álgebra Lineal". Ariel Economía, Barcelona.

Nakos, G., Joyner, D. (1999); "Álgebra lineal con aplicaciones". Thomson.

Noble, B., James, D. (1989); "Álgebra Lineal Aplicada"; 3ª Edición; Edit. Prentice Hall; México; 11.

Noble, B., James, W. (1987); "Applied Linear Algebra". 3ª ed. Prentice Hall International Paperback.

O'Connor, J., Robertson, E., Stefan, B. (2000). "MacTutor History of Mathematics". University of St Andrews, Scotland. http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach

Poole, D. (2004); "Álgebra lineal. Una introducción moderna". International Thompson Publishi.

Proskuriakov. (1986); "Problemas de Álgebra Lineal". Mir Moscú.

Rorres. (1979); "Aplicaciones del álgebra lineal". Limusa, Trillas.

Swokowsky, E. (1986); "Matrices y determinantes". Díaz de Santos.

Sydsaeter, K., Hammond, P. (1995). Mathematics for Economic Analysis. Pearson Education: New Jersey.

Vavilov, V., otros. (1993); "Problemas de Matemáticas. Álgebra". Mir Moscú.

Voevodin. (1986); " Álgebra Lineal". Mir Moscú.

Weber, J. (1984); Matemáticas para Administración y Economía; 4ª Edición; Edit. Harla; México; 9.

Weierstrass, K. (1894); "Mathematische Werke", 7 Vols., Berlin (Mayer und Muller)

Un primer curso de Álgebra Lineal. Notas introductorias, se terminó de imprimir el 1 de septiembre de 2022, la edición estuvo al cuidado de los talleres de DocuMaster, Av. Coyoacán 1450, Col. Del Valle, Benito Juárez, C.P. 03220, Ciudad de México, la edición consta de 500 ejemplares más sobrantes para reposición.

DCSH Publicaciones

El objetivo principal de *Un primer curso de álgebra lineal* es capacitar al estudiante para comprender, formular y resolver ejercicios de manera que pueda aplicar con mayor soltura los temas aquí tratados a cada una de las problemáticas que se enfrente. La idea de presentar los temas a partir de su forma general, tiene la finalidad de permitir que las aplicaciones sean abordadas por cada área del conocimiento y profesorado de la manera más adecuada para cumplir con sus objetivos, es decir, es un modo de generalizar y entender los temas que tendrán aplicación e interpretación para cada disciplina, sin dejar de lado que en la aplicación se asumen conceptos y soltura para la resolución de los problemas.

Este material ha sido presentado a los estudiantes de la licenciatura en economía de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco, y sobra decir que con sus comentarios en clase y fuera de ésta han mejorado y aportado ejercicios aquí incluidos para que sea más sencillo y comprensible el texto. El libro está pensado para que pueda utilizarse en un curso que inicie con el capítulo de matrices y termine con el capítulo de diagonalización, o bien, como un texto que presente de manera independiente cada tema y subtema del contenido general.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA
UNIDAD XOCHIMILCO

ISBN 978-607-28-2384-6