Matemática$ financiera$

para el crédito, el ahorro y la inversión

Yolanda Daniel

Colección Docencia y Metodología

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
UNIDAD XOCHIMILCO División de Ciencias Sociales y Humanidades

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Matemáticas financieras

para el crédito, el ahorro y la inversión

Yolanda Daniel Chichil

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD XOCHIMILCO División de Ciencias Sociales y Humanidades

Casa abierta al tiempo

Diseño de la portada: Irais Hernández Güereca

Primera edición, 13 de mayo de 2008

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Xochimilco
Calzada del Hueso 1100
Colonia Villa Quietud, Coyoacán
04960, México, D. F.

ISBN: 978-970-31-1000-1
ISBN de la colección: 978-970-31-0946-3
Impreso en México / *Printed in Mexico*

Índice

Agradecimientos 9
Prefacio 11

Capítulo 1. Conceptos básicos 15
Introducción 15
1.1 Supuestos utilizados en las matemáticas financieras 15
1.2 Diagrama de tiempo. Concepto y representación 16
1.3 Cómo se acumula el capital 19
1.4 La medida del interés 21
Conclusiones importantes de los ejemplos resueltos 31
Ejercicios propuestos 34
Conviene recordar 35

Capítulo 2. Interés y descuento simple 37
Introducción 37
2.1 Interés simple 38
2.2 Descuento simple 49
Ejercicios propuestos 74
Conviene recordar 77

Capítulo 3. Interés compuesto 81
Introducción 81
3.1 Valor acumulado de un capital 81
3.2 Tasas de interés y sus características 84
3.3 Relación entre el modelo de capitalización y el modelo de interés simple: ¿cuál produce mejores rendimientos? 107
Ejercicios propuestos 112
Conviene recordar 115

Capítulo 4. Ecuación de valor 117
Introducción 117
4.1 Operaciones con más de dos flujos de efectivo 117
4.2 Fecha equivalente (tiempo desconocido) 126
Ejercicios propuestos 131
Conviene recordar 133

Capítulo 5. Anualidades ciertas 135
Introducción 135
5.1 Definiciones 135
5.2 Clasificación de anualidades 136
5.3 Anualidades donde la frecuencia del pago periódico *R* coincide en el periodo de pago de la tasa de interés 139
5.4 Anualidades ciertas donde no necesariamente se hace coincidir la frecuencia del pago de la tasa de interés con el pago de la renta 145
5.5 Anualidades donde el número de pagos ***n*** o la tasa de interés ***i*** se desconoce 151
5.5.1 Número de pagos desconocidos (*n*) 151
5.5.2 Tasa de interés desconocida (*i*) 154
Ejercicios propuestos 163
Conviene recordar 168

Capítulo 6. Amortización 171
Introducción 171
6.1 Cálculo de la renta o pago periódico 172
6.2 Cálculo de la tabla de amortización 175
Ejercicios propuestos 192
Conviene recordar 198

Capítulo 7. Análisis de inversiones 199
Introducción 199
7.1 Método del valor presente neto (VPN) 200
7.2 Método de la tasa interna de rendimiento (TIR) 203
Ejercicios propuestos 212
Conviene recordar 215

Capítulo 8. Bonos 217
Introducción 217
8.1 Valores importantes que aparecen en la carátula de un bono 218
8.2 Precio de compra de bonos redimibles al vencimiento 219
Ejercicios propuestos 232

Anexo. Funciones financieras de Excel 233
Introducción 233
1.1 Descripción de Funciones Financieras de Microsoft® Office Excel 2003 233
1.1.1 Descripción de los argumentos de cada función financiera 235
1.2 Ejercicios resueltos de los capítulos 235

Bibliografía 271

A mi mamá, a mi esposo, a mis hijos y a mis hermanos que sentían que me importaba más "hacer dinero", aunque sólo escribía sobre él.

A ti papá que seguramente estás viéndome con una gran sonrisa junto al Señor de los Mil Nombres.

Agradecimientos

LA AUTORA AGRADECE a la División de Ciencias Sociales y Humanidades de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco, por patrocinar proyectos editoriales que apoyen la docencia, como es el caso de esta obra.

Aun corriendo el riesgo de incurrir en omisiones importantes quiero agradecer a todos mis alumnos que a lo largo de casi diez años han descifrado y estudiado mis notas escritas a mano, éstas fueron el origen del presente libro; algunos de ellos ya siendo profesionistas me impulsaron a escribirlo.

Agradezco a mis alumnos prestadores de servicio social porque hicieron suyo el proyecto al leer, plantear, calcular y revisar hasta la última coma del manuscrito; merecen especial agradecimiento Arturo Bravo González, Claudia Chacón Torres, Abril Jacqueline Ramos y Agustín Maldonado Bazán, también Jerónimo Agustín Sánchez Flores que pese a las fronteras siguió trabajando en el libro.

No puedo dejar de mencionar a mis alumnos de las dos generaciones más recientes: Humberto Salazar Salazar, Sonia Alcántara Salas, Emmanuel Torres García, Perla Rangel López, Denisse White Ortega, Cynthia Trujillo Galicia, Víctor Rincón, Martha Galván Guzmán, Juan Carlos Mendoza, Verónica Ledón Rodríguez y Claudia Chávez Silva, que dedicaron sus horas libres –que a su edad no suelen cambiarlas por nada– para ejercitarse en el manejo del dinero ajeno y resolver y revisar los ejercicios propuestos al final de cada uno de los capítulos de este documento; sin embargo, cualquier error u omisión es responsabilidad mía.

Agradezco a la jefatura del departamento de Producción Económica y al maestro Carlos Hernández Gómez quien me brindó todos los recursos materiales y propició un ambiente inmejorable para que este libro saliera a la luz. Aprecio en todo lo que vale la generosa disposición de mis colegas; vaya un abrazo cariñoso a Salvador de León Campero.

Prefacio

Pocas cuestiones provocan más interés que el dinero. Mientras para algunos sólo es un bien intermedio en un proceso de intercambio, para otros representa la posibilidad de realizar sus proyectos. Las personas y las empresas lo demandan y quieren retenerlo para realizar transacciones, para especular o para prevenirse, es decir, para usarlo en caso de necesidad. Sin importar el motivo, siempre se desea tenerlo con el mínimo costo y el máximo rendimiento. Este recurso puede utilizarse en el momento presente o en el futuro porque mantiene su valor en el tiempo.

Todas las transacciones realizadas por su medio presuponen que su precio o costo de adquisición debe ser tal que las operaciones presentes pueden diferirse. Este enfoque, el dinero como depósito de valor y no meramente como medio de cambio, introduce en los negocios la necesidad de emplear técnicas y métodos matemáticos que permitan evaluar las consecuencias financieras de las decisiones adoptadas.

El objetivo de este libro es proporcionar al estudiante los conceptos, modelos, técnicas y habilidades matemáticos para comprender el valor del dinero en el tiempo y resolver los problemas que surgen en operaciones financieras y comerciales que realizan las personas, los mercados y las instituciones.

Esta obra se estructuró a partir del principio básico de la teoría del interés que dice que toda transacción financiera se considera en términos de intercambios, por ejemplo, la compra-venta. Así las obligaciones de ambas partes deben ser equitativas (en un negocio ambas partes ganan), es decir, las obligaciones se expresan por medio de ecuaciones llamadas de tiempo y valor, las cuales se obtienen fácilmente a partir de la identificación de las obligaciones del acreedor y del deudor en un diagrama representado por una recta de tiempo. De este modo, el estudiante podrá, mediante sencillos despejes algebraicos, encontrar la solución sin necesidad de memorizar fórmulas; éstas se incluyen al final de cada capítulo sólo para que el estudiante comprenda cómo se generan a partir de los modelos básicos estudiados aquí.

El enfoque actual para la enseñanza de las matemáticas financieras lo ha determinado, entre otros factores, la gran disponibilidad de computadoras en todos los ámbitos; por ejemplo, en las aulas es posible prestar más atención al razonamiento, comprensión y análisis que al cálculo algebraico: la hoja electrónica de cálculo ha permitido imprimirle mayor dinamismo a la enseñanza de las matemáticas financieras. Permite omitir procedimientos que involucraban, hasta hace pocos años, la inclusión previa de conceptos de las matemáticas puras; por ejemplo, la expansión en series de potencias, las sucesiones y series en progresión aritmética y geométrica o métodos avanzados de aproximaciones sucesivas para el cálculo de tasas de interés y número de términos (pagos) de las series, entre otros. Ahora es posible conocer el valor de esas variables con el empleo de la hoja electrónica de cálculo; asimismo, es posible explotar las funciones integradas de la hoja. Ahora se puede comprender mejor la solución del polinomio que representa el valor presente neto de la serie de pagos, sean fijos o variables, incluso se puede determinar rápidamente si existe multiplicidad de raíces o tasas internas de rendimiento de esa serie, procedimiento que representaba un grado de dificultad mayor en la enseñanza de este tipo de matemáticas aplicadas a los negocios. La rápida diseminación del uso de computadoras ha provocado que el material bibliográfico sobre el tema haya quedado rezagado.

Por lo anterior, todos los capítulos que conforman el presente libro se estructuraron a partir del concepto de equilibrio en las transacciones financieras; bajo este enfoque se establecen siempre ecuaciones para solucionar problemas de cualquier complejidad con la ayuda de una hoja electrónica y sin la necesidad de recurrir a fórmulas especiales, lo cual evita que el estudiante memorice las diversas fórmulas financieras que han distinguido a las matemáticas financieras. La ventaja de este enfoque —implícito en la mayoría de los textos conocidos, pero al cual no se le hace el debido hincapié— es que permite solucionar cualquier problema empleando diversos procedimientos, por ejemplo, ya no es necesario que coincida la frecuencia del pago de la tasa de interés con la del pago periódico; tampoco se necesita recurrir a la expresión que proporciona la suma de los primeros términos de una serie ni se le requiere para encontrar el número de pagos de la serie porque se recurre a la construcción directa de la amortización en la hoja electrónica de cálculo; no obstante, se expone la teoría respectiva en forma muy accesible y resumida sólo para la tranquilidad de quienes desean comparar contenidos temáticos.

Por ser un curso eminentemente práctico, se omitieron las demostraciones matemáticas formales pero se respetó el rigor que señala la teoría del interés.

El libro comprende nueve partes: ocho capítulos y un anexo, ordenados según la única secuencia lógica posible, sin que se pueda conocer un capítulo sin haber estudiado el precedente.

En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos de la teoría del interés, a partir de los cuales se estructuran todas las aplicaciones; se explica con detalle el uso de una tasa de interés sin importar cuál es el modelo de acumulación del capital.

En el capítulo 2 se muestra el proceso de interés y descuento simple con sólo dos flujos de efectivo[1] y se enfatiza el concepto de tasa efectiva por periodo. El descuento

[1] El concepto de *flujos de efectivo* se emplea sencillamente como ingresos y egresos de dinero; no posee la connotación que se le da al presupuestar el capital, aunque en ésta al final se traduce también a ingre-

se ilustra con la compra-venta de Certificados de la Tesorería de la Federación con el uso de ambas tasas de interés y descuento; esta opción promueve el aprendizaje del tema y prepara al estudiante para valuar otro tipo de obligaciones, como los bonos que se estudian en el capítulo 8.

En el capítulo 3 se aborda el interés compuesto que se empleará a lo largo de todo el libro. También se ilustra el proceso de acumulación con dos flujos de efectivo, como en el capítulo precedente. Se introduce el tema de equivalencia entre tasas de interés para que el estudiante pueda evaluar alternativas financieras que no responden a pautas convencionales de flujos de efectivo, o bien simplemente para comparar rendimientos.

En el capítulo 4 se aborda explícitamente la construcción de una ecuación de valor, que antes de este capítulo se emplea implícitamente; a la ecuación de valor se le considera como la columna vertebral de las matemáticas financieras porque con ella se puede evaluar cualquier alternativa financiera; de su plena comprensión depende que el estudiante sea capaz de resolver cualquier problema en los negocios sin tener que recurrir a fórmulas especiales.

El capítulo 5 enfatiza el concepto y cálculo de anualidades unitarias y con pagos fijos R que se pueden convertir o no en expresiones más compactas en términos de cálculo; con ello se brinda total libertad al estudiante de ignorar la existencia de toda una teoría de series en progresión geométrica sin preocuparse si el problema a resolver se enmarca en casos generales preestablecidos; con este enfoque se capacita al estudiante para valuar obligaciones con series de pagos crecientes y decrecientes, que respondan o no a una pauta convencional, a tasas fijas y variables.

En el capítulo 6 se muestra el proceso de amortización de una deuda con pagos fijos y tasa fija, y para el caso de pagos fijos con tasa variable; muy común en la práctica pero poco enseñado en los textos.

El desarrollo del capítulo 7 se apoya por completo en la hoja electrónica de cálculo para encontrar aproximadamente los puntos de intercepción del perfil del valor presente neto con el eje de las abscisas y adoptar una decisión financiera a partir de ese valor aproximado. Con ello se logra hacer muy dinámico un proceso que hasta hace poco representaba un alto grado de complejidad. Si se deseara conocer el valor preciso de ese punto (la tasa interna de rendimiento), se muestra el método de interpolación lineal.

El capítulo 8 tiene como objetivo general que el estudiante verifique, a partir de la aplicación de lo aprendido en el libro, que es posible resolver cualquier alternativa fi-

---

sos y egresos; el empleo del término me ha parecido pertinente porque es compatible con el enfoque del libro en el sentido de que no es necesario asociar ningún signo algebraico (positivo o negativo) a las corrientes de efectivo, como se verá al establecer las ecuaciones; sin embargo, como esta práctica sí es común en el ámbito financiero (la del signo), en el capítulo 7 y en el anexo se respeta esa costumbre porque facilita la comprensión de las aplicaciones ahí mostradas.

nanciera, por ejemplo cuando se tratan obligaciones de largo plazo propiamente más vinculadas a los mercados de valores que al sector bancario.

En el anexo se ilustra el uso de las funciones financieras de Microsoft® Office Excel para resolver por este medio ejercicios seleccionados a partir del capítulo 3, los cuales se identifican con el símbolo . Estas funciones representan una poderosa ayuda al facilitar los cálculos que implica la valuación de series de pagos en el tiempo.

El estudiante debe estar consciente de que aunque la computadora ejecute los cálculos finales, ello no lo exime de efectuar los planteamientos respectivos (una ecuación de valor), por lo que deberá conocer la teoría; sólo así podrá resolver cualquier tipo de situación que se le presentara en esta área.

El aprendizaje de las matemáticas financieras es asunto práctico, por ello los ejemplos resueltos en el libro son tan valiosos como la teoría que los soporta así como los ejercicios propuestos al final de cada capítulo. Por su parte, el estudiante debe esforzarse en llegar a la respuesta que se proporciona en la mayoría de ellos: el proceso de ensayo y error también promueve el aprendizaje.

Por último, debo señalar que el presente curso es apropiado para administradores, economistas y para quienes deseen incorporarse al sector financiero; también resulta básico para quienes deseen tener acceso a un posgrado en finanzas.

Aunque se tuvo cuidado en la edición, es posible que aparezcan algunos errores, se ofrece una disculpa anticipada y se pone a disposición del lector atento la dirección electrónica <ydaniel@correo.xoc.uam.mx> para hacérmelos notar.

Yolanda Daniel Chichil
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Xochimilco

Capítulo 1
Conceptos básicos

Introducción

Las matemáticas financieras son una rama de las matemáticas aplicadas cuyo objetivo es estudiar el valor del dinero en el tiempo, para lo cual emplea técnicas, métodos y modelos a fin de adoptar la mejor decisión financiera, ya sea en la valuación de empresas, en los proyectos de inversión, en los mercados de deuda y en general en la planeación financiera.

El objetivo de este capítulo es conocer y definir los términos, variables y herramientas que permitirán comprender y aplicar las técnicas, métodos y modelos que se presentan a partir del capítulo 2.

Se presentarán los supuestos básicos bajo los cuales se acumula el dinero y se mostrará la representación gráfica de las obligaciones del acreedor y del deudor. Con esta representación, conocida como *diagrama de tiempo y valor*, se logran identificar tales obligaciones y medir el tiempo en el que se vuelven exigibles para aplicar la fuerza que hace que el dinero "crezca": la tasa efectiva de interés.

1.1 Supuestos utilizados en las matemáticas financieras

La teoría del interés se refiere a los diversos métodos para el cálculo del interés y la forma en que tanto el capital como el interés se devuelven al prestamista. El interés es la cantidad que se paga por el uso, durante cierto tiempo, de un capital ajeno; para calcularlo se considera el capital objeto de la inversión financiera y la longitud de tiempo que corresponde desde el inicio de la transacción hasta el momento en que se devuelve el capital junto con los intereses. A esta longitud de tiempo se le llama también *plazo* o *término de la operación*. La acumulación del capital, derivada del pago de interés, se realiza por medio de funciones llamadas de acumulación; en este texto se verán dos de las que se emplean en la práctica.

Supuestos de la teoría del interés:

a) El capital (C) y el interés (I) se expresan en términos monetarios.
b) El capital siempre está productivo, es decir, el dinero siempre se incrementa en términos absolutos a través del tiempo (t). El valor cronológico del dinero implica que para $t_2 > t_1$, el capital C_2 en el momento t_2 es mayor que el capital C_1 en el momento t_1 para $t_2 > t_1 \Rightarrow C_2 > C_1$. Esto implica que no se consideran los efectos de la inflación: C_2 siempre es mejor que C_1.
c) Existe una fuerza que hace que el dinero "crezca" a través del tiempo; a esta fuerza se le conoce como tasa de interés.
d) El tiempo durante el cual se pagan efectivamente los intereses (o periodo en el que se paga la tasa de interés). Este tiempo se refiere a *la unidad de tiempo* con la cual se paga la tasa de interés realmente, que puede o no coincidir con el plazo de la operación. Entre las unidades de tiempo más frecuentes se mencionan las de 7, 14, 28, 91, 182 y 360 días; así, una tasa de interés se acompaña de la unidad de tiempo con la cual se paga. Es importante señalar que para efectos de cálculo conviene expresar el plazo en *unidades de tiempo*, es decir, el tiempo que se considere como plazo debe referirse al número de unidades o fracciones de unidad; si bien esto facilita los cálculos, no tiene carácter obligatorio.

1.2 Diagrama de tiempo. Concepto y representación

En toda transacción financiera se identifica a la parte dueña de los recursos —quien los presta— y a la parte que solicita en calidad de préstamo tales recursos; ambas partes tienen derechos y obligaciones (A le presta a B un cierto capital C durante un determinado tiempo y le cobra una cantidad por ello; B se obliga a devolver ese capital C, junto con una cantidad adicional). Para representar gráficamente esta operación de préstamo se emplea una recta sobre la cual se construye una escala que muestra los egresos o gastos y los ingresos obtenidos durante los periodos de tiempo que comprenden una operación; se representan sólo obligaciones de A y B porque el derecho de una de ellas es la obligación de la otra; así, se habla únicamente de obligaciones y no de derechos y obligaciones. La escala se inicia en el momento "cero", el momento en que se efectúa la operación financiera.

En esta escala, las unidades de tiempo (t) son periodos de interés, por ejemplo, si el interés que se paga por una inversión es semestral, entonces la longitud de los intervalos es semestral. Si los intereses se pagan trimestralmente entonces la longitud corresponde a tres meses y la unidad de tiempo es el trimestre. En una escala de tiempo se usan las siguientes convenciones:

a) El número de periodos de interés o la fecha, si se prefiere utilizar fechas, se escriben bajo la escala de tiempo.
b) El número 0 en la escala indica siempre la fecha de inicio de la operación.
c) El final de un periodo marca el inicio del siguiente periodo.
d) Los ingresos o cantidades de dinero que una inversión produce en un periodo determinado (derechos) se indican sobre la escala.
e) Los egresos, gastos o salidas de dinero que una inversión requiere en cada periodo (obligaciones) se indican en la parte inferior de la escala.
f) El periodo de pago de la tasa de interés y el último periodo en la escala indican al inversionista la unidad de tiempo empleada (meses, trimestres, semestres, años) y la duración de la inversión.
g) En una escala de tiempo, las cantidades de dinero que se indican en cada periodo (ingresos o desembolsos del inversionista) pueden ubicarse al inicio o al final de cada periodo; en el primer caso se habla de pagos anticipados y en el segundo de pagos vencidos.

Para mostrar el uso de estas convenciones en la elaboración de un diagrama de tiempo, considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Se solicita un préstamo de $2000 que conviene liquidar mediante una serie de pagos mensuales de $100 que incluyen una parte del capital prestado y los intereses respectivos. La duración de la serie de pagos será hasta el fin de la deuda.[1]

Identifique las obligaciones del deudor y del acreedor en un diagrama de tiempo.

Solución

La unidad de tiempo, o longitud de cada intervalo, es el mes, pues corresponde a la frecuencia del pago de interés.

En toda transacción financiera se identifican, más que derechos, obligaciones; en este caso, la obligación del inversionista o prestamista es el desembolso de manera inmediata de $2000, mientras que la del prestatario es la de pagar $100 al final de cada mes hasta la extinción total de la deuda.

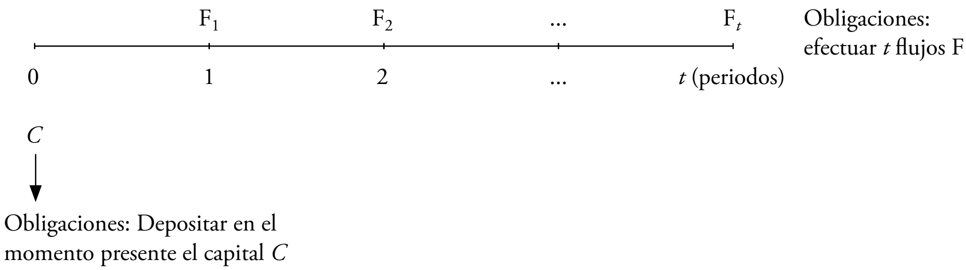
La escala de tiempo en que se ubican las obligaciones del prestatario (Obligación A) y del inversionista (Obligación B) es la siguiente:

	100	100	...	100	Obligación A
0	1	2	...	*n meses*	Obligación B
$2000					

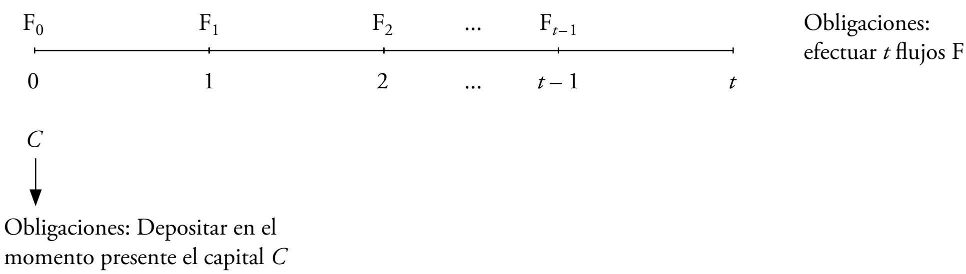
[1] En este momento es irrelevante expresar la composición del pago mensual de $100 en capital e intereses.

En el documento se hablará de "pagos" o flujos de efectivo para denotar depósitos o retiros, indistintamente: los primeros se consideran como pagos positivos y los segundos negativos si no hay lugar a confusión; no obstante, el signo negativo de los egresos no aparece en el planteamiento porque al identificar las obligaciones de las partes se vinculan con una ecuación, es decir, sólo se relacionan pagos propiamente dichos.[2]

De manera general, si se deposita una cantidad C en el momento presente para tener derecho a percibir una serie de "pagos" o flujos de efectivo F *al final* de cada periodo durante t periodos, se pueden ubicar tales obligaciones en la escala de tiempo siguiente:



Si los flujos de efectivo F se realizan al principio de cada periodo:



Debe observarse que en este caso se termina la obligación de pagar (los flujos F) un periodo antes del último; sin embargo, siguen siendo t flujos de efectivo porque se inició el pago un periodo antes (al inicio del primer periodo).

En general, en toda transacción financiera se identifican los siguientes elementos:

1. El capital objeto de la transacción.
2. El tiempo durante el cual se usa el capital hasta que se devuelve junto con su interés. También se le conoce como plazo o término de la operación.
3. El tiempo durante el cual se paga interés.
4. El interés que se paga periódicamente.

[2] El término *flujos de efectivo* se empleará como entradas y salidas de dinero sin anteponer ningún signo algebraico.

5. La fuerza que hace que el dinero aumente, es decir, la tasa de interés. Se expresa como razón de un tanto de cada unidad de capital prestado, por ejemplo: \$10 por cada \$100 prestado, es decir $\frac{10}{100} = 0.10$ o tasa del 10%, indica que por cada \$100 prestados se devolverán \$10 de interés en el lapso de una unidad de tiempo.

La definición formal de *tasa efectiva de interés* se hará en la sección 1.4 de este capítulo.

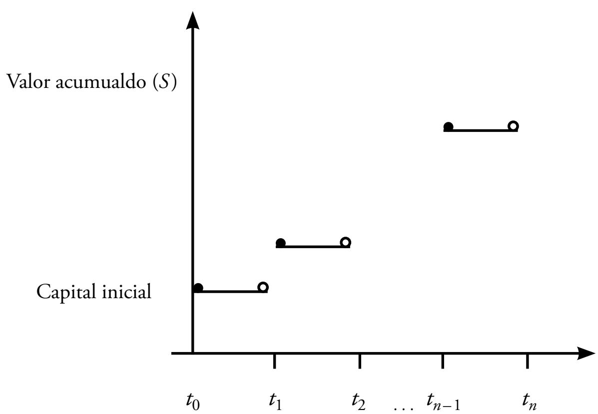
1.3 Cómo se acumula el capital

La función de acumulación del capital se define con base en una progresión aritmética (crecimiento lineal o simple) o geométrica (crecimiento exponencial o compuesto).

El crecimiento del capital se debe al efecto de una tasa de interés y al transcurso del tiempo. En términos prácticos, la acumulación de un capital se efectúa bajo un régimen de interés simple (los intereses son generados sólo y únicamente por el capital original, llamado también principal) o bajo un régimen de capitalización (los intereses generados se reincorporan al capital para producir a su vez nuevos intereses). El régimen de capitalización es el que predomina en el mercado financiero, y su sustento es una función de crecimiento exponencial, de tal forma que la variable independiente es el tiempo.

El capital crece en intervalos finitos, de tal manera que *durante* todo el intervalo se posee el mismo capital que al *principio* y sólo aumenta al final del intervalo; véase en la gráfica 1.1 la acumulación discreta del capital, que es la que se registra para efectos prácticos.

Gráfica 1.1
Acumulación discreta de capital

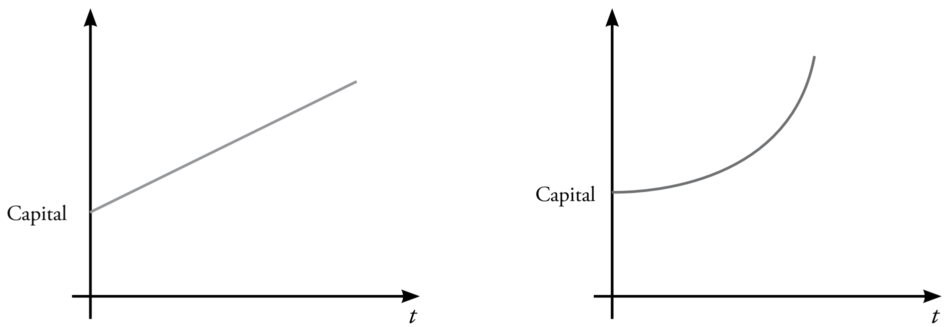


Obsérvese en la gráfica que si un capital C se acumula en el intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ (para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) a una cierta tasa de interés, habrá la misma cantidad C a lo largo del intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ y sólo se habrá incrementado el capital C (por acumulación de intereses) en el tiempo $t = t_{j+1}$.

Para ilustrar lo anterior, en la gráfica se utilizó el círculo negro para denotar el valor del capital al inicio del intervalo y el círculo blanco para indicar que al final del intervalo se acreditan los intereses y la nueva cantidad ya aparece registrada al inicio del siguiente. Lo anterior significa que las entidades financieras acreditan el interés sólo en el aniversario del contrato.

En teoría, tal incremento no se da en forma escalonada; puede intuirse que existe una "fuerza" que hace que el capital se incremente continuamente en el intervalo referido, a saber:[3]

Gráfica 1.2
Valor acumulado (S) del capital



Función lineal del valor acumulado del capital (régimen de interés simple) (a)

Función exponencial del valor acumulado del capital (régimen de interés compuesto) (b)

Obsérvese que ambas líneas son "suaves", es decir, son continuas en el tiempo.

Aunque existen otras funciones de acumulación, no son de relevancia para efectos prácticos. De las dos funciones, (a) y (b), la exponencial es la que representa el proceso de reincorporación —continua— del interés al capital para generar nuevos intereses. En este proceso de acumulación opera una tasa de interés *continua.*

[3] La acumulación del capital se origina de la incorporación de intereses al capital; la distinción entre interés *simple* y *compuesto* obedece al hecho de que se calcula el nuevo interés en cada periodo a partir del capital original o del acumulado, respectivamente.

En este libro se estudiarán sólo dos funciones de acumulación del capital: la del interés simple (o crecimiento aritmético) y la del interés compuesto (o crecimiento geométrico).

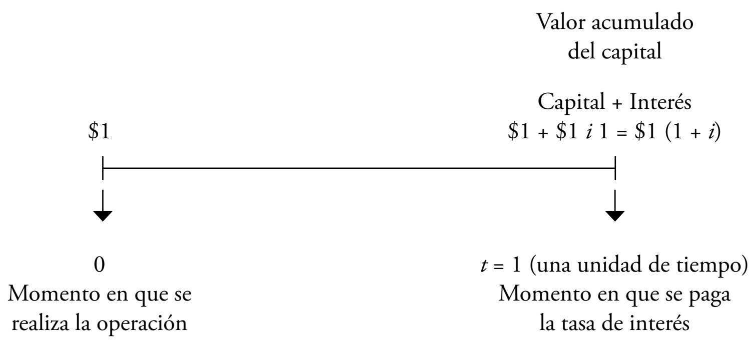
En el capítulo 1 se verá el régimen de interés simple y a partir del capítulo 2 el de capitalización.

1.4 La medida del interés

Para medir el interés se consideran los tres elementos que se mencionaron en la sección 1.1: capital, interés y tiempo. Sin embargo, la medida fundamental del interés es la tasa efectiva de interés.

La tasa efectiva de interés

Supóngase que una unidad monetaria se invierte durante una unidad de tiempo (por ejemplo, un día, mes, año, etc.) a una tasa de interés i pagadera precisamente durante esa misma unidad de tiempo. El siguiente diagrama ilustra la operación del interés generado y su incorporación al capital original.



Se observa así que el interés se paga atendiendo al capital objeto de la transacción y al tiempo durante el cual la tasa de interés se paga[4] efectivamente.

[4] Se dice que una tasa de interés es “pagadera” o que “se paga” al final del periodo unitario de tiempo, cuando el prestamista o inversionista recibe una cantidad fija de dinero, el interés pactado en la transacción financiera, por el uso del capital durante ese periodo.

El interés que se pagó por unidad de capital prestado y por unidad de tiempo es:

$$i = \frac{\text{Interés ganado}}{(\text{capital prestado})\ (\text{unidad de tiempo})}$$

$$i = \frac{\text{Valor acumulado del capital} - \text{Capital prestado}}{(\text{capital prestado})\ (\text{unidad de tiempo})}$$

Con base en esta relación, las definiciones de tasa efectiva de interés son las siguientes:

El cociente que resulta de dividir la cantidad del interés ganado durante un periodo por el capital invertido al inicio del periodo.

La cantidad que se paga al final de un intervalo unitario de tiempo por cada unidad de capital prestado (o invertido) al inicio del mismo.

La tasa efectiva de interés se puede calcular para cualquier unidad de tiempo: día, semana, mes, semestre, entre otros.

Sea: $C \sim$ el capital objeto de la transacción financiera.
$I \sim$ el interés ganado en la operación.
$i \sim$ la tasa de interés efectiva pagadera por unidad de tiempo.
$t \sim$ el plazo expresado en unidades de tiempo. La unidad de tiempo. corresponde al periodo con el cual se paga la tasa de interés.
$S \sim$ el valor acumulado (valor futuro o monto) del capital.

La tasa efectiva de interés, *i,* por unidad de tiempo se obtiene de acuerdo con la definición arriba señalada:

$$i = \frac{I}{C\,t} \qquad [1.1]$$

Así, se puede definir a la tasa efectiva de interés como:

- La medida del interés pagado al final del periodo.
- La cantidad de dinero que una unidad monetaria invertida al inicio de un periodo de tiempo ganaría durante el periodo.
- El cociente que resulta de dividir la cantidad de dinero ganada durante el periodo por la cantidad invertida al inicio del periodo.
- El incremento por unidad de capital bajo el efecto de una fuerza de interés durante un periodo de tiempo.
- La cantidad que se paga en un intervalo de tiempo por cada unidad de capital invertido.

La relación [1.1] se emplea para calcular el interés (*I*) ganado

$$I = Cit \qquad [1.2]$$

De las definiciones [1.1] y [1.2] debe observarse que:

> El interés ganado en una operación es una cantidad en dinero, mientras que la tasa de interés es un cociente expresado por regla general como porcentaje.

Esta definición implica que el interés se paga al final del periodo de inversión y sólo una vez durante el mismo; la tasa efectiva se refiere al pago de interés por periodo de inversión; a este periodo se le conoce como *periodo unitario de tiempo* y durante él la tasa efectiva y el capital permanecen constantes.

> *Definición de interés:*
> Cantidad de dinero que se paga por usar el dinero ajeno.

Ejemplos que muestran cómo influye la unidad de tiempo en el cálculo de la tasa efectiva

Ejemplo 2

Si por una inversión de $10000 durante seis meses se pagan intereses de $800, ¿cuál es la tasa de interés efectiva…

a) ...anual?
b) ...semestral?
c) ...mensual?

Solución

a) Conviene tomar como unidad de tiempo[5] al año; así el plazo se expresa como ½ de la unidad de tiempo:

Capital + Interés = Valor acumulado
10000 + 800 = Valor acumulado
$C + I$ = VA

[5] La unidad de tiempo corresponde al periodo en el que se paga la tasa de interés.

$$i = \frac{\textit{Valor acumulado} - \textit{Capital}}{\textit{Capital} \cdot t} = \frac{I}{C\,t}$$

$$i = \frac{800}{10000\ (½)}$$

∴ la tasa de interés efectiva anual es de 16%.

b) Tómese como unidad de tiempo el semestre; el plazo representa entonces una unidad, 1, de tiempo:

10000 + 800

0 — t = 1 semestre

$10000

$$i = \frac{800}{10000\ (1)}$$

∴ la tasa de interés efectiva semestral es de 8%.

c) Considérese como unidad de tiempo el mes, el plazo representa entonces 6 unidades de tiempo:

10000 + 800

0 — t = 6 meses

$10000

$$i = \frac{800}{10000\ (6)}$$

∴ la tasa de interés efectiva semestral es de aproximadamente 1.33%.

El cuadro 1.1 resume lo anterior:

Cuadro 1.1
La unidad de tiempo y la tasa de interés

Plazo	Capital	Intereses	Valor acumulado	Tasa %	Tasa efectiva
6 meses	$10000	$800	$10800	16.0%	anual
6 meses	$10000	$800	$10800	8.0%	semestral
6 meses	$10000	$800	$10800	1.333%	mensual

Aun cuando el plazo sigue siendo el mismo, el periodo o frecuencia del pago de la tasa puede variar, sin embargo debe observarse que en todos los casos produce el mismo interés sobre el mismo capital; a las tasas de interés que poseen esta característica se les conoce como *tasas equivalentes*. Así, la penúltima columna del cuadro corresponde a tasas efectivas equivalentes.

Lo anterior se puede verificar mediante un cálculo directo del valor acumulado (S) utilizando la expresión [1.2] para calcular los intereses y después incorporarlos al capital.

$$S = C + I \qquad [1.3]$$

a) $S = 10000 + 10000(0.16)(\frac{1}{2})$
$\quad = \$10800$

b) $S = 10000 + 10000(0.08)(1)$
$\quad = \$10800$

c) $S = 10000 + 10000(0.0133)(6)$
$\quad = \$10800$

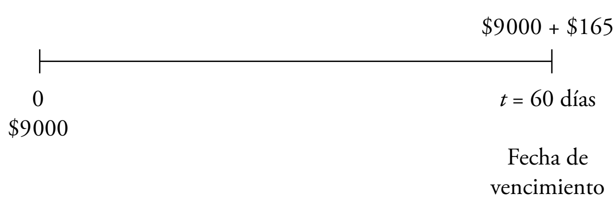
Del presente ejemplo se desprende que una tasa efectiva de interés debe acompañarse de la indicación del periodo de su pago (como en la última columna del cuadro 1.1).

Ejemplo 3

Una deuda de \$9000 vence dentro de dos meses y el importe de los intereses es de \$165. ¿Cuál es la tasa de interés que se paga por el préstamo? Supóngase que la operación se pactó el 6 de mayo.

Solución

Como la tasa de interés solicitada no expresa la frecuencia con la cual se paga, aquí se tomaría como unidad de tiempo el año.



La longitud del año en días puede ser de 360 o de 365 días; si se considera como de 360 y meses de 30 días, se dice que el interés es ordinario; si es de 365 (y por lo tanto número exacto de días del mes referido), se dice que el interés es exacto.

a) Si se emplea el interés ordinario:

Se sabe de la expresión [1.3] que:

$S = C + I$

Y a partir de la expresión [1.2]:

$S = C + Cit$

$$S = C\,(1 + it) \qquad [1.4]$$

Como esta expresión ya involucra a la variable I, se puede emplear para responder:

$$\$9165 = \$9000 + \$9000\,(i)\,\frac{60}{360}$$

$$\$9165 = \$9000\,(1 + (i)\,\frac{60}{360})$$

$$0.11 = i$$

□ la tasa efectiva anual del préstamo es de 11% si se considera el interés ordinario.

b) Si se emplea el interés exacto:

$$\$9165 = \$9000 + \$9000\,(i)\,\frac{61}{360}$$

$$\$9165 = \$9000\,(1 + (i)\,\frac{61}{360})$$

$$0.109699 = i$$

□ la tasa efectiva anual del préstamo es de 10.97% si se considera el interés exacto (año de 365 días y número exacto de días del mes).

En ambos casos, la fecha de vencimiento es el 6 de julio.

Reglas para medir el tiempo que hay entre dos fechas

Tiempo exacto:	Se considera al año de 365 días y el número exacto de días del mes o meses referidos; el tipo de interés es exacto.
Tiempo ordinario	Se considera el año de 360 días y cualquier mes como de 30 días; se dice que el tipo de interés es ordinario o simple.
Regla comercial	Se considera el año de 360 días y el número exacto de días del mes o meses referidos; se dice que el tipo de interés es comercial o bancario.

Ejemplo 4

Del ejercicio anterior ¿cuál es la tasa de interés efectiva pagadera cada 60 días?

Solución

Considérese como unidad de tiempo el periodo de 60 días, es decir, la frecuencia del pago de la tasa. Así, el plazo representa una unidad de tiempo.

De la expresión [2] se despeja la tasa efectiva de interés.

$$i = \frac{I}{Ct} = \frac{\$165}{9000\ (1)}$$

$$i = 0.0183$$

□ la tasa efectiva bimestral es de 1.833%.

El lector puede verificar que esta tasa es equivalente a 11% anual.

Los siguientes ejercicios se realizan bajo la suposición de que el año es de 360 días.

Cuando no se especifica si el interés es ordinario o exacto debe entenderse que se refiere al primero: año de 360 días y meses de 30 días.

Ejemplo 5

Del ejemplo 3, ¿cuál es la tasa de interés efectiva semestral?

Solución

Considérese como unidad de tiempo el periodo del pago de la tasa, 6 meses, el plazo será $\frac{60}{180}$ unidades de tiempo.

Si se emplea la expresión:

$$S = C + Cit$$

$$\$9165 = \$9000 + \$9000\ (i)\ \frac{60}{180}$$

$$i = 0.055$$

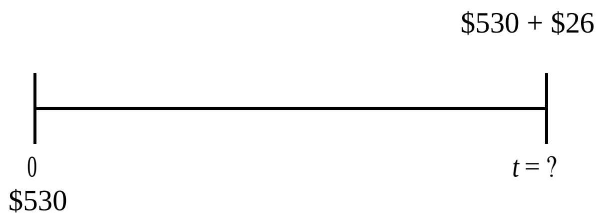
∴ la tasa efectiva semestral es de 5.5%. El lector puede verificar que es equivalente a 11% anual y a 1.833% mensual.

Ejemplo 6

Se solicita un préstamo de $530 por el cual se cobra un interés de $26. Si la tasa de interés es de 9%, ¿cuál fue la duración del préstamo?

Solución

Como no se especifica la frecuencia del pago de la tasa de interés, se da por sentado que es anual. Conviene tomar como unidad de tiempo el año. El diagrama es el siguiente:



Si despeja a la variable t de la expresión [1.4]

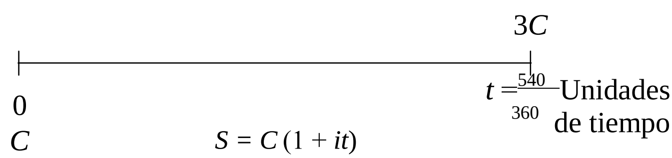
$$S = C\,(1 + it)$$
$$\$556 = 530\,[1 + 0.09\,(t)]$$
$$t = 0.545073$$

∴ la duración del préstamo es de 6 meses con 16 días, aproximadamente.

Ejemplo 7

¿A qué tasa debería invertirse un capital para triplicar su valor en 18 meses?

Si se toma como unidad de tiempo al año de 360 días:



$$S = C\,(1 + it)$$
$$3C = 530\ \left[1 + i\,\frac{540}{360}\right]$$
$$3 = \left[1 + i\,\frac{540}{360}\right]$$

∴ una tasa de interés efectiva anual de 133.33% permite triplicar cualquier capital si se invierte durante 18 meses.

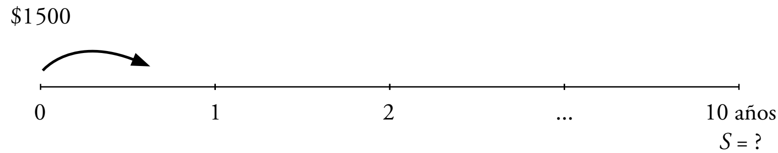
Ejemplo 8

Hallar el valor acumulado de:

a) \$1500 pagaderos en 10 años a 5% efectivo anual.
b) \$5000 pagaderos en 6 meses a 4.8% efectivo trimestral.
c) \$4000 pagaderos en 5 años 6 meses a 6% efectivo semestral.

Solución

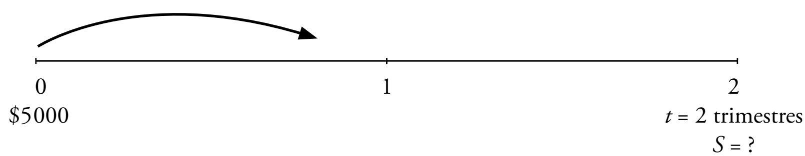
a) La unidad de tiempo es el año y las obligaciones se ubican en el siguiente diagrama de tiempo.



El valor acumulado del capital es:

$$S = C + I$$
$$S = C + Cit$$
$$S = \$1500 + \$1500\,(0.05)\,(10)$$
$$S = \$2250$$

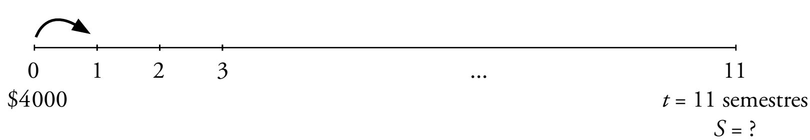
b) La unidad de tiempo es el trimestre



El valor acumulado del capital es:

$$S = C + I$$
$$S = C + Cit$$
$$S = \$5000 + \$5000\,(0.048)\,(2)$$
$$S = \$5480$$

c) La unidad de tiempo es el semestre.



El valor acumulado es:

$$S = C + I$$
$$S = C + Cit$$
$$S = \$4000 + \$4000\,(0.06)\,(11)$$
$$S = \$6640$$

Ejemplo 9

Un empleado solicitó un préstamo de \$150 a liquidar en dos meses y pagó \$9 por concepto de interés. ¿Cuál fue la tasa de interés anual?

Solución

Si la unidad de tiempo seleccionada es el año:

$$I = Cit$$
$$\$9000 = \$150\,(i)\left(\frac{2}{12}\right)$$
$$i = 0.36$$

□ la tasa de interés anual es de 36%.

Ejemplo 10

Se solicita un préstamo de \$125 y un mes después se liquida mediante el pago de \$128.75. ¿Qué tasa de interés anual se pagó?

Solución

Se considera como unidad de tiempo el año.

$$S = C(1 + it)$$
$$128.75 = 125\left[1 + i\left(\frac{1}{12}\right)\right]$$
$$i = 0.36$$

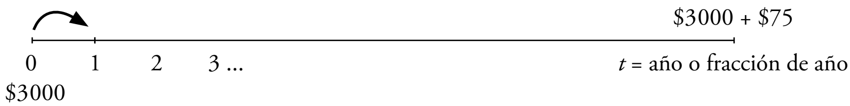
□ la tasa de interés pagada fue de 36 % anual.

Ejemplo 11

Si una persona presta \$3000 a 10%, ¿cuánto tiempo necesitará para obtener \$75 de interés?

Solución

Tómese como unidad de tiempo el año.



Si la unidad de tiempo es el año, el cálculo de los intereses es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
I &= Cit \\
\$75 &= \$3000\,(0.10)\,t \\
t &= 0.25 \text{ años}
\end{aligned}
$$

Para ganar $75 por intereses con un capital de $3000 a 10%, se necesita invertirlo durante tres meses.

Obsérvese que también puede emplearse la expresión [1.4].

Conclusiones importantes de los ejemplos resueltos

El ejemplo 2 nos permite observar que los resultados varían según se emplee determinada regla para medir el tiempo.

> **Interés ordinario y regla bancaria**
>
> Si el año se considera de 360 días y los meses de 30, se dice que los intereses se han calculado con el tipo de interés ordinario.
>
> Si el año se considera de 360 días y los meses según el número exacto de días que corresponda al mes referido, se dice que los intereses se han calculado mediante la regla bancaria.

El ejemplo 3 nos permitió concluir que aun cuando la tasa de interés estaba referida a diferentes periodos de pago (diferentes unidades de tiempo), producía los mismos intereses sobre el mismo capital durante el mismo plazo (véase cuadro 1.1), es decir, se proporcionaron tasas de interés equivalentes.

> Se dice que dos tasas son equivalentes si producen los mismos intereses sobre el mismo capital durante el mismo plazo.

Presentamos a continuación un ejemplo en el que se emplea el modelo de acumulación del capital $S = C(1 + it)$ para calcular tasas de variación, específicamente tasas de crecimiento; el modelo funciona para aumento o disminución.

Ejemplo 12

Cálculo de tasas de crecimiento
Las utilidades anuales por ventas de cierta empresa son:

Año	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
Ventas (miles de pesos)	350	410	560	730

a) ¿Cuál es la tasa anual de crecimiento de las utilidades por ventas?
b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento global de las utilidades por ventas en el periodo de referencia?

Solución

Aunque este ejemplo no se refiere a inversiones, puede responderse a partir del cálculo de la tasa de interés antes vista, es decir, del modelo de acumulación $S = C(1 + it)$, el cual puede convertirse en un modelo donde las utilidades del año actual se obtienen a partir de las utilidades del año anterior.

Si i es la tasa de incremento de las utilidades por ventas:

$$\text{Utilidad}_t = \text{Utilidad}_{t-1}\,(1 + i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{Utilidad}_t}{\text{Utilidad}_{t-1}} - 1 = i$$

Así, para la información proporcionada se puede graficar el diagrama de tiempo:

\$350	\$410	\$560	\$730
0	1	2	3
2004	2005	2006	2007

a) La tasa anual de crecimiento de las utilidades se obtiene para el primer año (de 2004 a 2005)

$$410 = 350\,(1 + i)$$

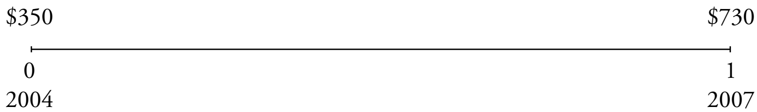
$$\Rightarrow \quad \frac{410}{350} - 1 = i$$

$\therefore$ $i = 17.14\%$ Tasa anual de crecimiento de las utilidades por ventas del 2004.

Al efectuar los dos cálculos siguientes se obtienen las tasas anuales de crecimiento de las utilidades por ventas para el periodo (2005-2007):

Año	**Tasa anual de crecimiento de utilidades**
2005	17.14%
2006	36.59%
2007	30.36%

b) La tasa de crecimiento *global* es el cambio porcentual de dos cantidades en un periodo (en este caso de 2004 a 2007); así, de acuerdo a lo visto sobre tasa de interés, la unidad de tiempo representa tres años:



$$730 = 350\,(1 + i)$$

$$\therefore \quad \frac{730}{350} - 1 = i$$

De donde la tasa global de crecimiento de las utilidades por ventas en el periodo 2004-2007 es de 108.57%.

Debe observarse que las tasas anuales reflejan mejor el comportamiento de las utilidades que la tasa global.

Ejercicios propuestos

1. Calcular el interés ganado por una inversión de \$100 000 a una tasa de interés simple de 5% anual durante los primeros tres meses y 6% anual durante los siguientes dos meses.
   Sol.: \$2 250.
2. Por un préstamo otorgado el día de hoy por \$12 500, un mes después se pagará \$128.71 por concepto de interés, ¿qué tasa de interés se pagará?
   Sol.: 12.36%.
3. Una persona obtuvo un préstamo de \$95, seis meses después liquidó tanto el capital como el interés con un pago de \$100. ¿Qué tasa de interés pagó?
   Sol.: 10.53%.
4. Calcular el interés que gana una inversión de \$8 888 a una tasa anual de 54% durante 23 días.
   Sol.: \$306.64.
5. ¿A qué tasa cuatrimestral equivale una tasa semestral de 23%?
   Sol.: 15.33%.
6. Verifique que en el ejercicio anterior ambas tasas son equivalentes al suponer que invierte \$50 000 a un plazo de cinco meses. Encuentre los rendimientos ganados al aplicar cada una de las tasas.
   Sol.: \$9 583.3 en cada caso.
7. Si la tasa trimestral es de 55%, ¿en cuántas quincenas se duplica el capital? Ayuda: Suponga un capital cualquiera; puede ser de \$1.
   Sol.: 10.91 quincenas.
8. ¿En cuántos días se cuadruplica un capital si la tasa de interés anual es de 227%? Sol.: 475.77 días.
9. ¿En cuánto tiempo un capital de \$50 000 produce interés de \$2 000, si se paga una tasa de interés de 15% anual?
   Sol.: 96 días.
10. Si un capital de \$5 000 se invierte durante tres meses, ¿qué importe tendrán los intereses ganados por el capital si se paga a una tasa efectiva de: a) 12% trimestral; b) 12% anual; c) 12% semestral?
    Sol.: a) \$600, b) \$150, c) \$300.

Conviene recordar

1. El capital se expresa en términos monetarios.

2. El capital aumenta de valor (sin considerar la inflación) en el tiempo: se debe preferir la cantidad de dinero del día de hoy a la cantidad de dinero del día de ayer sin importar cuál sea esa cantidad.

3. Para efectos teóricos, el capital crece continuamente; sin embargo, en la práctica crece escalonadamente.

4. Una tasa de interés se expresa en porcentaje y se emplea para cálculos aritméticos en decimales.

5. El interés es una cantidad de dinero; no confundir la tasa de interés con el interés.

6. La unidad de tiempo corresponde al periodo en el cual se paga la tasa de interés.

Fórmulas financieras

Valor futuro (valor acumulado) o monto

Fórmula básica

$$S = C + \boldsymbol{I}$$

Valor futuro cuando se involucran el tiempo y la tasa de interés

$$S = C + C\,\boldsymbol{it}$$

Fórmula básica

$$S = C\,(1 + \boldsymbol{it})$$

de donde se tiene:

Capital

$$t = \frac{I}{it}$$

Tasa de interés

$$i = \frac{I}{Ct}$$

Plazo

$$t = \frac{I}{C \cdot i}$$

Nota: se sugiere recordar sólo las expresiones de los recuadros blancos; son básicas porque las variables se obtienen mediante sencillos pasos algebraicos.

Capítulo 2
Interés y descuento simple

Introducción

Los problemas de la teoría del interés son relativamente elementales, cada problema se restringe a calcular las siguientes variables:

a) El capital invertido originalmente (C).
b) La tasa de interés (i).
c) La cantidad de dinero a recibir después de cierto tiempo (S).
d) La longitud del periodo de inversión (t).

Para calcular cualquiera de ellas, deben conocerse las tres variables restantes.

Los problemas más elementales se refieren a una cantidad de dinero que acumula una inversión o bien que cancela una deuda: en el primer caso se trata de un capital inicial y este capital más sus intereses en una fecha futura; en el segundo, una cantidad futura que se pagará a cambio de recibir en el momento actual una cantidad inferior, el capital. Éstos son los tipos de aplicación con los que se explica la teoría del interés para después extenderlos a operaciones con más de dos flujos de efectivo.

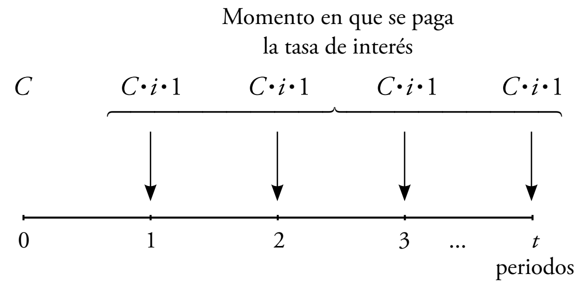
La teoría del interés estudia sólo dos modelos de acumulación (o bien de descuento) del capital, el modelo simple y el modelo compuesto.

La función lineal del capital supone que los intereses generados con la tasa de interés i se obtienen solamente con el capital inicial C, es decir, los intereses no se reincorporan al capital que los generó ni producen nuevos intereses; a esta función se le conoce como interés simple y generalmente se emplea en operaciones con plazos inferiores al año.

El objetivo de este capítulo es conocer el proceso de acumulación del capital en el interés simple y el proceso de descuento simple para aplicarlos en operaciones de préstamo o inversión con dos flujos de efectivo.

2.1 Interés simple

Si se invierte un capital C durante t periodos a la tasa de interés efectiva i por periodo, produce intereses pagaderos sólo al final de cada periodo:



Los intereses son $C\,i\,1$ debido a que la tasa es efectiva por periodo y en cada caso es un periodo unitario de tiempo; la tasa de interés actúa siempre sobre el capital original y los intereses sólo se reincorporarán al capital al final del plazo de t periodos.

El valor futuro del capital, sin considerar si se acumuló bajo el modelo de interés simple o compuesto, es el siguiente:

$$S = C + I \qquad [2.1]$$

Donde I representa los intereses ganados por el capital durante el plazo de la operación.

Los intereses I se obtienen de la acción que ejerce la tasa de interés i efectiva por periodo y el tiempo durante el cual se invirtió el capital.

$$I = C\,i\,1$$

Por lo tanto, en el modelo simple se suman los intereses generados al final de cada periodo durante el plazo de la operación:

$$S = C + \underbrace{C\,i\,1 + C\,i\,1 + \dots + C\,i\,1}_{t\text{ veces}}$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación [2.1]:

$$S = C + (C\,i\,t)$$

El valor acumulado S del capital C, invertido durante t periodos a la tasa de interés i efectiva por periodo, es el siguiente:

$$S = C\,(1 + it) \qquad [2.2]$$

Para obtener cada una de las variables involucradas en ella, basta realizar el despeje respectivo, por ejemplo:

> El valor actual C de una cantidad futura S descontada durante t periodos a una tasa de interés i efectiva por periodo es el siguiente:
>
> $$C = \left(\frac{S}{(1 + it)} \right) \quad \text{o} \quad C = S(1 + it)^{-1} \qquad [2.3]$$

Se puede interpretar como la cantidad C que se depositó hace t periodos para generar un monto S a la tasa de interés i efectiva por periodo.

El proceso de acumulación del capital bajo el modelo de interés simple se puede ilustrar gráficamente de la siguiente forma:

Sea I_j los intereses ganados en el j-ésimo periodo.

El valor acumulado del capital al final del primer periodo es:

$$C + I_1 = C + \underbrace{C\,i\,1}_{\text{Interés actual}} = C\,(1 + i)$$

El valor acumulado del capital al final del segundo periodo es:

$$C + I_1 + I_2$$

$$C + I_1 + I_2 = \underbrace{C\,(1 + i)}_{\substack{\text{Capital acumulado}\\ \text{del periodo anterior}}} \quad + \quad \underbrace{(C\,i\,1)}_{\text{Interés actual}} = C\,(1 + i + (i\,1)) = C\,(1 + 2i)$$

El valor acumulado del capital al final del tercer periodo:

$$C + I_1 + I_2 + I_3$$

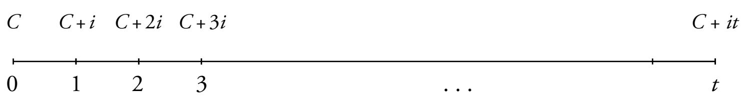
$$C + I_1 + I_2 + I_3 = \underbrace{C(1 + 2i)}_{\substack{\text{Capital acumulado} \\ \text{del periodo anterior}}} + \underbrace{(C\,i\,1)}_{\text{Interés actual}} = C(1 + 2i + i) = C(1 + 3i)$$

Por lo tanto, el valor acumulado del capital al final de t-ésimo periodo es:

$$C + I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_t = \underbrace{C(1 + (t-1)i)}_{\substack{\text{Capital acumulado} \\ \text{del penúltimo periodo}}} + \underbrace{(C\,i\,1)}_{\text{Interés actual}} = C(1 + it)$$

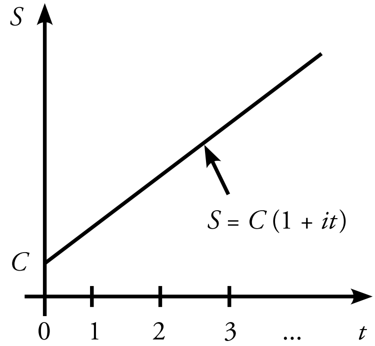
Obsérvese que el interés en cada periodo se calcula únicamente sobre el capital C inicial.

Si se ubica el valor acumulado del capital al final de cada periodo en un diagrama de tiempo se ve como sigue:



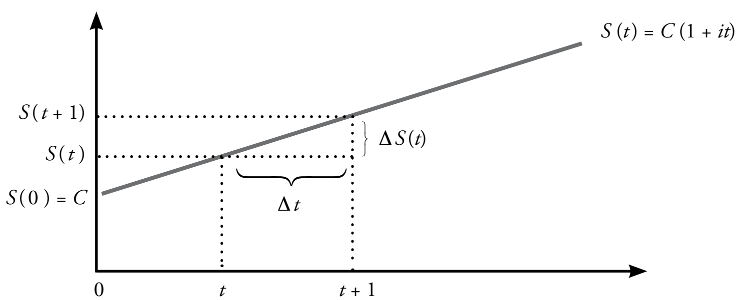
La gráfica del valor acumulado del capital al final de cada periodo de tiempo se muestra en la gráfica 2.1; la suposición fundamental es que el crecimiento del capital es continuo en el tiempo:

Gráfica 2.1
Valor acumulado del capital
en el modelo de interés simple



El factor de acumulación $(1 + it)$ corresponde a una función lineal (o función de acumulación de interés simple) donde la ordenada (C) es precisamente el valor del capital al inicio de la operación; la tasa de interés i es la pendiente de la recta definida por la ecuación lineal, es decir, es la tasa de cambio del capital con respecto al tiempo: por cada unidad de tiempo que transcurra, el capital aumenta i unidades monetarias. En el diagrama 2.2 se identifica a la tasa de interés i como una medida de cambio del capital con respecto al tiempo, donde $S(t)$ es una función de acumulación del capital que representa el valor acumulado de éste al final del t-ésimo periodo.

Gráfica 2.2
Valor acumulado del capital bajo el efecto
de una tasa de interés efectiva en el modelo simple



$$i = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(t+1) - S(t)}{(t+1) - (t)} = \text{razón a la que crece el capital bajo el esquema simple}$$

$$i = \text{tasa de cambio del capital con respecto al tiempo}$$

Vista así, la tasa de interés se interpreta como una medida de elasticidad, es decir, de la fuerza a la que aumenta el capital por unidad de aumento en el tiempo. Obsérvese que en términos matemáticos, i representa la pendiente de la recta del valor acumulado del capital.

En sentido estricto, la función de acumulación para el esquema de interés simple se define para valores enteros de t (gráfica 1.1, capítulo 1), sin embargo, se puede extender la definición para valores no enteros de t, lo anterior significa que los intereses se pagan proporcionalmente sobre cualquier fracción de periodo.

La función de acumulación del capital, $S(t)$, cumple con los requisitos para cualquier función matemática de acumulación:

i) *El valor acumulado del capital en el momento cero o presente es el capital mismo.*
ii) *Es una función creciente.*
iii) *Es una función continua del tiempo.*

En la práctica los intereses no se pagan de forma continua (véase gráfica 1.1, capítulo 1); existen discontinuidades entre las fechas de pago de intereses; sin embargo, para efectos teóricos se supondrá continuidad en el pago de intereses y por ende en la función de acumulación del capital (véase grafica 1.2, capítulo 1).

Ejemplos resueltos de la Sección 2.1

En los siguientes ejemplos se empleará el tipo de interés simple ordinario a menos que se especifique lo contrario. Es decir, se considerará el año de 360 días y el mes de 30 días.

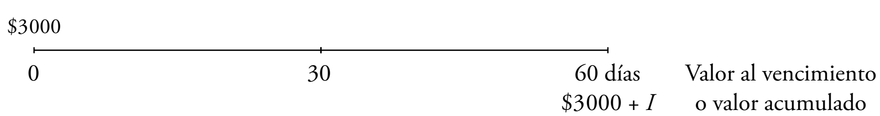
Ejemplo 1

Por un préstamo de $3000 se cobra un interés de 10% pagadero cada tres meses en forma simple si se liquida en 60 días, ¿cuál es el valor al vencimiento y cuál es el importe de los intereses?[1]

Solución

Se considera el trimestre como unidad de tiempo, el plazo representa entonces 60/90 unidades de tiempo; es decir, el plazo se debe expresar en la misma unidad de tiempo.

Conviene representar ambas obligaciones por medio de un diagrama de tiempo.



[1] El valor al vencimiento de un préstamo es la suma del capital prestado y sus respectivos intereses.

Si se emplea la expresión [2.2]

$$S = C(1 + it)$$

$$S = 3000\left(1 + (0.10)\left(\frac{60}{90}\right)\right)$$

$\therefore\ S = \$3200$ es el valor al vencimiento. El importe de los intereses es el siguiente:

$$I = S - C$$

$$I = 200$$

También se pueden calcular los intereses a partir de la definición de la tasa efectiva en la ecuación [1.2] del capítulo 1.

Ejemplo 2

Se solicita un préstamo de \$530 por el cual se cobra un interés de \$26. Si la tasa de interés es de 9%, ¿cuál fue la duración del préstamo?

Solución

Como no se indica la frecuencia del pago de la tasa de interés, se la considera anual. Se tomará como unidad de tiempo el año. El diagrama de tiempo es el siguiente:

Como:

$$S = Cit$$

$$556 = 530\left(1 + 0.09\left(\frac{t}{360}\right)\right)$$

si se despeja a la variable t, se conoce que la duración del préstamo fue de 196.22 días.

Ejemplo 3

Si se invierten \$80000 en un banco durante un año y nueve meses para triplicar su valor, ¿qué tasa de interés debería pagar el banco?

Solución

Se tomará como unidad de tiempo el año. El diagrama de tiempo es el siguiente:

Como:

$$S = C(1 + it)$$
$$3\,(80000) = 80000\,(1 + it)$$
$$3 = \left(1 + i\left(\frac{630}{360}\right)\right)$$

∴ La tasa a la que se debería invertir un capital de $80 000 para triplicarlo al final de 21 meses es de 114.29% anual.

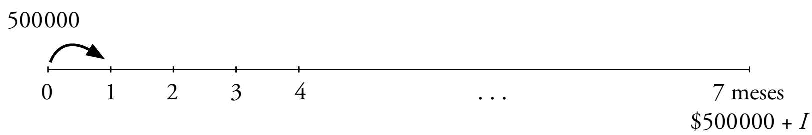
Debe observarse que la tasa encontrada es la que permite triplicar el valor de cualquier capital C en el tiempo dado.

Ejemplo 4

Encontrar el valor acumulado de un capital de $500 000, invertido a 7 meses con una tasa anual de 3.5% pagadera cada 7 días.

Solución

La unidad de tiempo es el día, el año de 360 días y por lo tanto los meses serán de 30 días. Las obligaciones de las partes se ubican en el siguiente diagrama de tiempo:



$$S = C(1 + it)$$
$$S = 500000\left(1 + \frac{0.035}{360}\,(210)\right)$$
$$S = \$510208.33$$

De haberse empleado 7 días como unidad de tiempo, se calcularía de la siguiente manera:

$$S = 500000\left(1 + \frac{0.035}{\frac{360}{7}}\left(\frac{210}{7}\right)\right)$$

lo cual genera el mismo resultado; en ambos casos se sigue la sugerencia de expresar al tiempo de acuerdo con la unidad de tiempo seleccionada.

Ejemplo 5

Grafique el valor acumulado de la inversión del ejemplo 4.

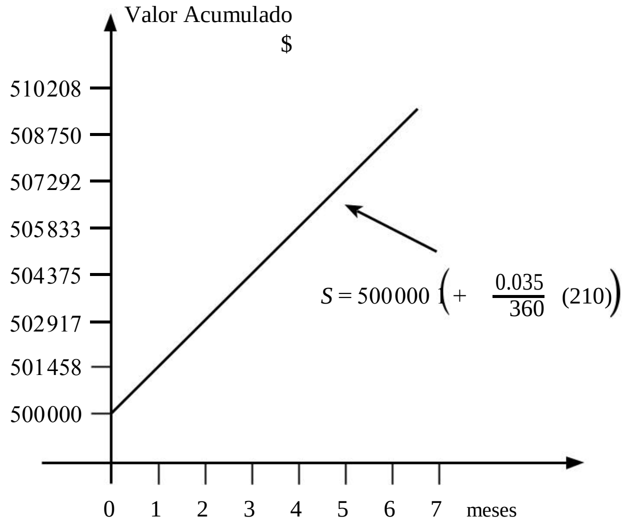
Solución

Se necesita calcular el valor acumulado de la inversión al final de cada mes; el procedimiento y cálculo se muestra en el cuadro 2.1.

Cuadro 2.1
Cálculo del valor acumulado al final de cada mes de una inversión de $500 000 durante siete meses; la tasa de interés que gana la inversión es de 3.5%

Tiempo (t)	Capital (C)	Interés $I = Cit$	Valor acumulado al final del t-ésimo mes $S = C(1 + it)$
1	500 000	$500000\left[\frac{0.035}{12}(1)\right]$ = 1 458	$500000\left[1+\frac{0.035}{12}(1)\right]$ = 501 458
2	500 000	$500000\left[\frac{0.035}{12}(1)\right]$ = 1 458	$500000\left[1+\frac{0.035}{12}(2)\right]$ = 502 917
3	500 000	$500000\left[\frac{0.035}{12}(1)\right]$ = 1 458	$500000\left[1+\frac{0.035}{12}(3)\right]$ = 504 375
4	500 000	$500000\left[\frac{0.035}{12}(1)\right]$ = 1 458	$500000\left[1+\frac{0.035}{12}(4)\right]$ = 505 833
5	500 000	$500000\left[\frac{0.035}{12}(1)\right]$ = 1 458	$500000\left[1+\frac{0.035}{12}(5)\right]$ = 507 292
6	500 000	$500000\left[\frac{0.035}{12}(1)\right]$ = 1 458	$500000\left[1+\frac{0.035}{12}(6)\right]$ = 508 750
7	500 000	$500000\left[\frac{0.035}{12}(1)\right]$ = 1 458	$500000\left[1+\frac{0.035}{12}(7)\right]$ = 510 208

Gráfica 2.3
Valor acumulado de una inversión al final
de cada mes en el régimen de interés simple

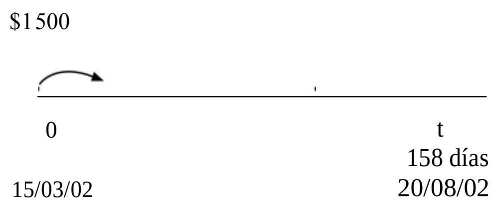


Hasta este momento no se ha especificado el día y mes de la operación; cuando se especifica la fecha, se puede emplear el tipo de interés ordinario, exacto o comercial; con cada uno de ellos el plazo de la operación se debe expresar en días y se recomienda utilizar la tasa de interés diaria pues facilita los cálculos (véase ejercicio 4). Con el siguiente ejemplo se ilustra lo anterior.

Ejemplo 6

De un préstamo de $500,000 otorgado el 15 de marzo de 2002 y pagadero el 20 de agosto del mismo año, con una tasa de 35%, calcular el interés pagado.

Solución



Cuando se especifica la fecha en que se pacta la operación financiera, debe especificarse el criterio empleado para medir el tiempo. A continuación se muestra el interés ordinario, el interés exacto (vistos en el capítulo 1) y el interés bancario.

a) Si se emplea el tipo de interés simple ordinario se considera el año de 360 días y los meses de 30 días.

$$S = 500000\left(1 + \frac{0.03}{360}\,(155)\right)$$

S = \$507,534.72
I = \$ 7,534.72

b) Si se considera el interés comercial o bancario se calcula el interés según la regla bancaria (*Ruler'sbank*) o regla comercial, la cual considera el año de 360 días y los meses según el número exacto de días del mes o meses referidos.

$$S = 500000\left(1 + \frac{0.035}{360}\,(158)\right)$$

S = \$507,680.56
I = \$7,680.56

c) Si se considera un interés exacto se considera el año de 365 días y los meses según el número exacto de días d~~el me~~s en cuestión.

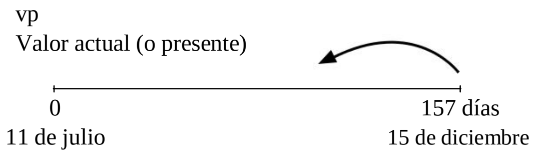
$$S = 500000\left(1 + \frac{0.035}{360}\,(158)\right)$$

S = \$ 507, 575.34
I = \$ 7,575.34

∴ al inversionista le conviene invertir bajo el tipo de interés bancario o comercial.[2]

Ejemplo 7

¿Cuál es el valor actual de un pagaré con valor nominal de \$9000 cuyo vencimiento se efectúa el 15 de diciembre con una tasa de interés de 38% y hoy es 11 de julio?



[2] En el sistema financiero se emplea la regla bancaria (interés bancario) tanto para inversiones como para préstamos.

Solución

Unidad de tiempo: días

$$S = C(1 + it)$$

$$C = S(1 + it)^{-1} \quad \text{o} \quad C = \left(\frac{S}{(1 + it)}\right)$$

$$C = 9\,000\left(1 + \frac{0.38}{360}(157)\right)^{-1}$$

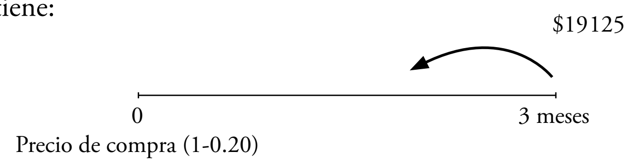
$C = \$7720.53$ Es el valor actual al 11 de julio de un pagaré que vence el 15 de diciembre y tiene un valor nominal de \$9000 con una tasa de interés de 38%

Ejemplo 8

¿Cuál es el precio de contado de un bien que se paga dando un anticipo de 20% del precio de contado y se firma un pagaré a 3 meses de plazo por \$19125 (cantidad que incluye intereses) a la tasa de 25% anual?

Solución

El valor actual del pagaré es su valor descontado durante 3 meses; si la unidad de tiempo es el mes, se tiene:



A partir de la expresión [2.2], el valor actual o capital es $C = S(1 + it)^{-1}$, entonces:

$$\textit{valor actual del pagaré} = \$19125\left(1 + \frac{0.25}{12}(3)\right)^{-1}$$

$$= \$18000 \longleftarrow$$ Este valor considera que ya se le ha deducido el anticipo de 20%

$\therefore$ Precio de compra (PC)

$$PC(1 - 0.20) = 18000$$

$$PC = \frac{18000}{0.80}$$

$$PC = \$22500$$

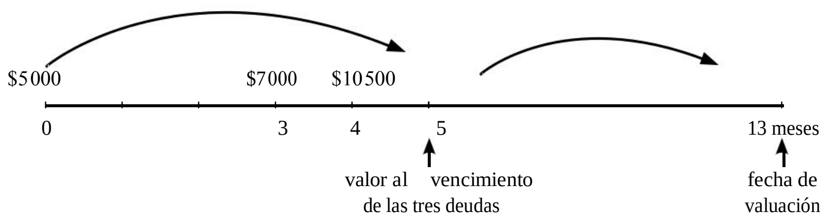
Precio de contado del bien que se paga dando un anticipo del 20% sobre el precio y se firma un pagaré a 3 meses con un valor nominal de \$19125 con una tasa de interés de 25% anual

Ejemplo 9

Hace cinco meses se prestaron \$5000 a 10% anual; hace dos se prestaron \$7000 a 5% anual; hace un mes se prestaron \$10500 a 8% anual. Los tres préstamos se vencen el día de hoy. Se desea saldar la deuda mediante un pago único dentro de ocho meses a una tasa de interés de 12% anual. ¿Cuál es la cantidad que cancelará los tres préstamos? Tómese como fecha de valuación el 13º mes.

Solución

Las tres deudas han vencido en el momento presente (el quinto mes); se encontrará el valor al vencimiento de las tres deudas y éste se acumulará, con sus respectivos intereses, al 12% durante ocho meses; esta última cantidad "*X*" será un pago único que cancelará las tres deudas.



$$x = \Big(\underbrace{\$5000\left(1+\frac{0.10}{12}(5)\right)+\$7000\left(1+\frac{0.05}{12}(2)\right)+\$10500\left(1+\frac{0.08}{12}(1)\right)}_{\text{Valor al vencimiento en el quinto mes de las tres deudas}}\Big)\left(1+\frac{0.12}{12}(8)\right)$$

Pago único a efectuarse en el mes número 13, con el que se cancelan las obligaciones

X = (\$5,208.33 + \$7058.33 + \$10570) (1.08)

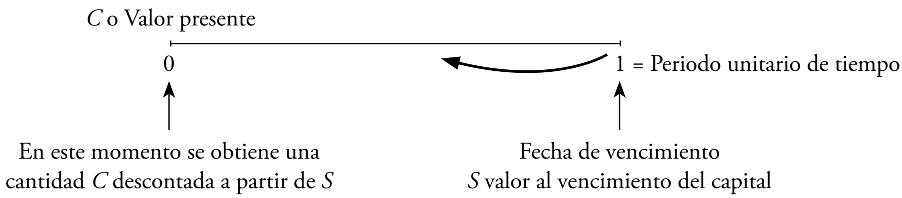
X = \$24,663.59

2.2 Descuento simple

Los problemas en los cuales se aplica un descuento son aquellos en que una persona física o moral tiene derecho a disponer de una cantidad de dinero en el futuro al final de un intervalo de tiempo, pero desea disponer de él de manera inmediata, es decir, en el momento presente; por el hecho de adelantar la fecha en que puede disponer del dinero, la persona recibe un castigo (que es una cantidad de dinero) que paga también de manera inmediata. El castigo es un descuento que se paga en el momento presente, pero se calcula sobre una cantidad futura.

Sea:

S: La cantidad de dinero de la que puede disponerse después de un cierto tiempo o fecha de vencimiento. Se le llama también valor al vencimiento.
C: La cantidad que se recibe de inmediato al adelantar la fecha de vencimiento[3] o valor presente.
D: La cantidad en dinero que se deduce del valor al vencimiento.
d: La tasa efectiva de descuento o fuerza con la que disminuye el dinero.
t: El plazo expresado en periodos unitarios de tiempo.



Así, C es una cantidad menor a la que se recibiría de esperarse a que transcurriera la fecha de vencimiento; también se le llama *valor presente* de S o *valor al vencimiento de C*. La cantidad de dinero que se paga por adelantar la fecha de vencimiento es $(S - C)$ y representa un castigo porque se descuenta en el momento presente; representa en sí misma el descuento D. La "fuerza" con la que se le ha calculado en ese periodo unitario de tiempo es la siguiente: $\frac{S-C}{S1}$

La tasa efectiva de descuento d es el cociente del interés ganado durante el periodo, por el monto o valor futuro del capital en un periodo unitario de tiempo. Una definición más precisa de tasa efectiva de descuento es la siguiente:

$$d = \frac{S-C}{S1} = \frac{S-C}{S} \qquad [2.4]$$

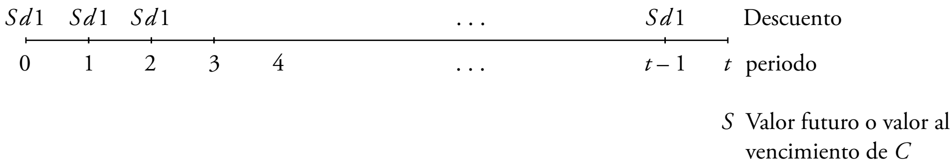
$$d = \frac{D}{S1} = \frac{D}{S} \qquad [2.5]$$

Proceso de descuento simple

El descuento simple se calcula a partir de la misma cantidad futura S, es decir, el descuento D es constante durante el periodo de la operación.

[3] A partir de esta sección se identificará al capital C como *valor presente o valor descontado*.

En el siguiente diagrama de tiempo se ejemplifica el monto e importe de los descuentos a los que está sujeto S durante t periodos bajo la acción de una tasa de descuento d:



Así el valor descontado C (o valor presente) de una cantidad futura S, bajo la acción de una tasa de descuento durante t periodos es la siguiente:

$$C = S - (\underbrace{Sd + Sd + \dots + Sd}_{t \text{ descuentos}})$$

$$C = S - Sd \cdot t$$

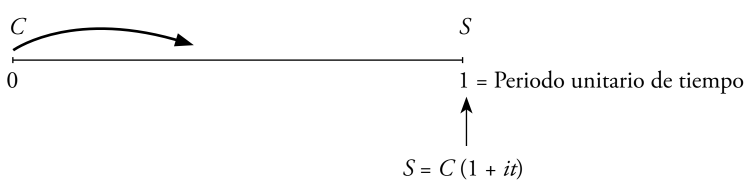
> El valor descontado C de un monto S durante t periodos a la tasa de descuento d efectiva por periodo t es el siguiente:
> $$C = S\,(1 - dt) \qquad [2.6]$$

La última expresión no sólo permite calcular al valor presente sino también al valor de una cantidad futura S, es decir, se considera un proceso de acumulación con tasa de descuento:

$$S = C\,(1 - dt)^{-1} \qquad [2.7]$$

Una misma operación bajo dos enfoques: de acumulación y de descuento

Como el descuento es un proceso inverso al de acumulación, se puede analizar esta operación de descuento desde el punto de vista de la teoría del interés. Así resulta que se dispone de una cantidad C ahora y se pagará una suma S al final de un intervalo de tiempo. Esta cantidad S se originó por la acción de la tasa de interés i que actuó sobre el capital C:



La diferencia *S* – *C* es el interés *I* ganado durante el periodo, pero se paga *al final* del mismo; la tasa efectiva de interés, *i*, es el cociente que resulta de dividir el interés ganado por el capital que lo generó:

$$i = \frac{S-C}{C1}$$

$$i = \frac{i}{c}$$

La tasa de descuento en realidad es una *tasa de interés pagada por adelantado*, por lo tanto ambos métodos son dos maneras diferentes de la misma transacción financiera.

La teoría del interés es la misma que la teoría del descuento. Esto significa que a cada tasa de interés le corresponde una tasa de descuento y a cada tasa de descuento le corresponde una tasa de interés.

2.2.1 Comparación entre los procesos de acumulación y de descuento

Con el objeto de señalar la diferencia entre ambos procesos, obtengamos el valor acumulado (o valor futuro) de \$10000 invertidos a la tasa de interés de 8% anual y el valor descontado de \$10000 (valor presente) a una tasa de descuento de 8% anual. El plazo- de la operación en ambos casos es de 6 meses.

Cuadro 2.2
Comportamiento del interés y el descuento simple

	Interés simple $S = C\left(1 + \frac{0.08}{360}(t)\right)$	**Descuento simple** $S = C\left(1 - \frac{0.08}{360}(t)\right)$
***t* días**	**valor acumulado al final del periodo**	**valor descontado al principio del periodo**
0	10000	10000
30	10067	9933
60	10133	9867
90	10200	9800
120	10267	9733
150	10333	9667
180	10400	9600

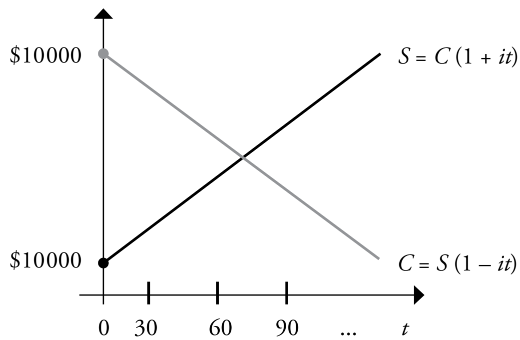
Los conceptos de acumulación y descuento se entenderán mejor al ubicar los valores acumulados y descontados, respectivamente, en un diagrama de tiempo; véase la figura 2.1. El *principio del periodo* para el descuento se refiere *al final del primer periodo* contado a partir de la fecha de vencimiento (180 días).

Figura 2.1

$10000	10067	10133	10200	10267	10300	10400	⟵ Valor acumulado
0 VP	30	60	90	120	150	180 días	
$9600	9667	9733	9800	9867	9933	10000	⟵ Valor descontado

Al graficar los valores en el plano cartesiano, se aprecia el comportamiento inverso del proceso de descuento con respecto al de acumulación.

Gráfica 2.4
Valor acumulado del capital con tasa de interés
y valor descontado (de un valor futuro) con tasa de descuento



Diferencias entre ambos procesos:

Interés simple	*Descuento simple*
El interés se calcula sobre el valor presente (o capital).	El descuento se calcula sobre el valor futuro *S*.
El valor presente se encuentra en el momento en que se pacta la operación (momento cero).	En el momento en que se pacta la operación, se promete una cantidad futura; a cambio se entrega el valor presente si se adelanta la fecha de vencimiento.
Por esperar a que transcurra la fecha de vencimiento, se recibe un premio: la tasa de interés.	Por no esperar a que transcurra la fecha de vencimiento se recibe un castigo: la tasa de descuento.
En el proceso de acumulación los intereses se calculan sobre el capital (o valor presente). La tasa de interés se paga al final de cada periodo.	En el proceso de descuento, el descuento se calcula sobre el valor futuro. La tasa de descuento se paga al inicio de cada periodo.

2.2.2 Correspondencia entre tasa de interés y tasa de descuento

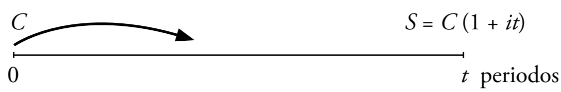
El descuento que se estudia en la teoría del descuento se refiere al interés que la entidad financiera cobra sobre el dinero que anticipa, es decir, el interés que se cobra por adelantado. El interés que se estudia en la teoría del interés se refiere a la cantidad de dinero que se recibe, adicional al capital, por colocarlo a un plazo determinado que representa para el dueño de los recursos un tiempo de espera.

Un capital C invertido durante t periodos a una tasa efectiva de interés i por periodo, produce un monto S; esta operación es equivalente a disponer, hoy, de una cantidad C si se adelanta la fecha de vencimiento t periodos para disponer de un valor futuro S descontado a una tasa efectiva de descuento d por periodo.

Como el descuento y el interés son dos métodos diferentes de abordar el mismo problema, a cada tasa de descuento le corresponde una tasa de interés y a cada tasa de interés le corresponde una de descuento. Si ambas tasas son equivalentes producen el mismo valor futuro a partir del mismo capital y durante la misma longitud de tiempo. La relación entre ambas tasas se obtiene de la siguiente manera:

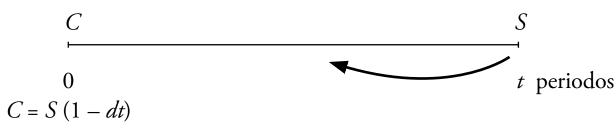
Si el capital C se invierte durante t periodos a la tasa de interés simple i efectiva por periodo, se acumula un valor S tal que:

Figura 2.2



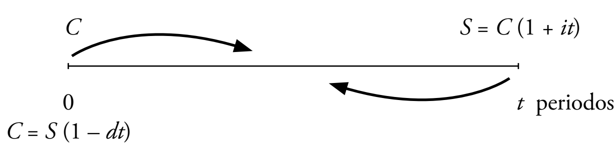
Si este capital C representa el valor presente de un monto S descontado a la tasa de descuento simple efectiva por periodo durante la misma longitud de tiempo, tenemos que:

Figura 2.3



Debido a que el capital C y el monto S son los mismos en las operaciones de interés y de descuento, respectivamente, las cantidades *(1 + it)* y *(1 – dt)* están relacionadas de la siguiente manera:

Figura 2.4



Dos tasas de descuento son equivalentes si para el mismo capital producen el mismo valor futuro durante la misma longitud de tiempo.

Si ambas tasas i y d son equivalentes, se cumple que el valor futuro S en ambos casos debe ser igual.

Al comparar las operaciones de interés (figura 2.2) y de descuento (figura 2.3), ambas en el tiempo futuro, resulta que:

$$C\,(1 + it) = C\,(1 - dt)^{-1}$$

$$(1 + it) = \frac{1}{(1 - dt)}$$

$$(1 + it) = (1 - dt)^{-1}$$

La equivalencia entre una tasa de interés i y una tasa de descuento está dada por la relación:

$$(1 + it) = (1 - dt)^{-1} \qquad [2.8a]$$

Si se comparan ambas tasas en el momento presente, el capital en ambos casos sería el mismo:

$$S\,(1 + it)^{-1} = S\,(1 - dt)$$

$$(1 + it)^{-1} = (1 - dt)$$

Por lo tanto, puede usarse cualquiera de las dos igualdades para encontrar la correspondencia (o equivalencia) entre una tasa de interés y una de descuento en el modelo simple.

De lo aquí expuesto se desprende que:

Si i y d son dos tasas equivalentes, se cumple que:

$$i > d$$

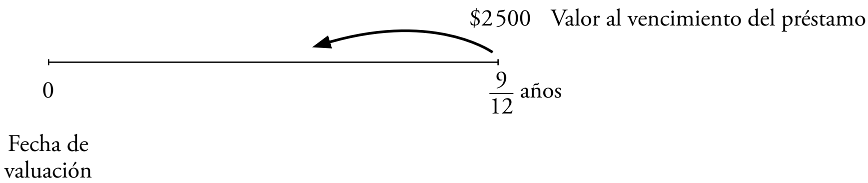
Ejemplos resueltos de la sección 2.2

Ejemplo 10

Determinar el valor presente de un préstamo de $2,500 con vencimiento dentro de 9 meses, empleando la tasa de descuento equivalente a un rendimiento anual de 6%.

Solución

La unidad de tiempo es el año.



Para encontrar la equivalencia entre la tasa de descuento y la de rendimiento se empleará la expresión [2.8a].

$$(1 + it) = (1 - dt)^{-1}$$

$$\left(1 + \frac{0.06}{360}(270)\right) = \left(1 - \frac{d}{360}(270)\right)^{-1}$$

$\therefore$ $d = 0.057416$, es decir, una tasa de descuento de 5.7416% anual corresponde a un rendimiento de 6% anual.

Ejemplo 11

Demostrar numéricamente que las dos tasas *d* e *i* del ejemplo 9 son equivalentes.

Solución

El valor del capital inicial, *C*, o valor presente del préstamo es el siguiente:

Por medio de la tasa de descuento tenemos que:

$$C = S\,(1 - dt)$$

$$C = 2500\left(1 - \frac{0.057416}{360}(270)\right)$$

$$C = \$2392.35$$

Por medio de la tasa de interés correspondiente (equivalente):

$$S = C\,(1 + it)$$

$$C = 2500\left(1 + \frac{0.06}{360}(270)\right)^{-1}$$

$$C = \$2392.35$$

Con lo cual queda demostrado que una tasa de descuento de 5.7416% anual es equivalente a un rendimiento de 6% anual.

Ejemplo 12

X obtiene de Y un préstamo de $1 200 a dos años, con intereses a 6%. ¿Qué cantidad tendría que aceptar Y como liquidación del préstamo 15 meses después de efectuado, suponiendo que Y desea un rendimiento de 5%?

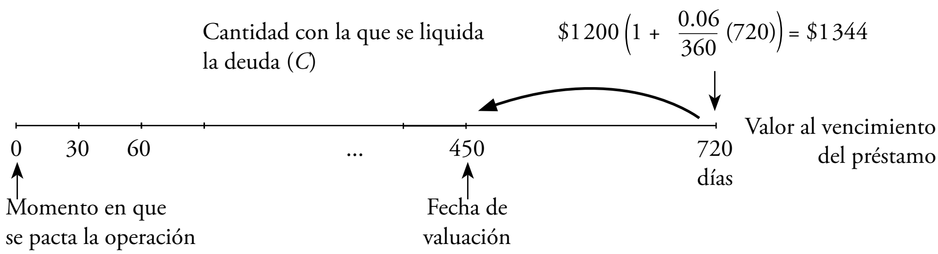
Este ejemplo muestra el descuento cuando la fecha de vencimiento se adelanta, es decir, una operación pactada con tasa de interés al final del plazo se liquidará antes de su vencimiento con tasa de interés.

Solución

Empleamos directamente la tasa de rendimiento de 5%, como unidad de tiempo al día, y el valor al vencimiento con tasa de interés de 6%.

a) Descuento con tasa de interés

Ubicamos después las obligaciones en un diagrama de tiempo:



El valor al vencimiento del préstamo se descuenta con la tasa de interés de 5% durante los nueve meses para obtener la cantidad que Y tendría que aceptar de X por adelantar la fecha de vencimiento nueve meses.

Cantidad con la que se liquida la deuda nueve meses antes del vencimiento

$$= \underbrace{1\,200\left(1+\frac{0.06}{360}(720)\right)}_{\text{Valor al vencimiento con tasa de interés}}\underbrace{\left(1+\frac{0.05}{360}(270)\right)^{-1}}_{\text{Factor de descuento con tasa de interés}}$$

$$= \$1\,295.42$$

b) Descuento con tasa de descuento

Empleamos una tasa de descuento equivalente al 5% de interés anual.
La relación de equivalencia entre ambas tasas es [2.8a]:

$$(1 + it) = (1 - dt)^{-1}$$

$$\left(1 + \frac{0.05}{360}(270)\right) = \left(1 - \frac{d}{360}(270)\right)^{-1}$$

Tasa de descuento equivalente al 5% de interés anual

$$d = 4.8192\%$$

El valor al vencimiento del préstamo se descuenta con esta tasa equivalente para encontrar la cantidad C a liquidar cuando se adelanta la fecha de vencimiento nueve meses:

$$C = \underbrace{1\,200\left(1 + \frac{0.06}{360}(720)\right)}_{\text{Valor al vencimiento}}\underbrace{\left(1 - \frac{0.048192}{360}(270)\right)}_{\text{Factor de descuento con tasa de descuento}}$$

$$C = \$1\,295.42$$

∴ En este ejercicio se debe notar que hay un proceso de descuento con tasa de interés y un proceso de descuento con tasa de descuento.

Ejemplo 13

Si la tasa de rendimiento anual simple que paga un banco es de 42% por un plazo de 90 días, ¿cuál es la tasa de descuento anual simple equivalente?

Solución

Se pide una tasa de descuento equivalente a la de descuento dada. Si se emplea la expresión [2.8b] tenemos que:

$$(1 - dt) = (1 + it)^{-1}$$

$$\left(1 - \frac{d}{360}(90)\right) = \left(1 + \frac{0.42}{360}(90)\right)^{-1}$$

$$d = 0.38009 \text{ o } 38\%$$

∴ La tasa de descuento anual de 38% es equivalente a una tasa de rendimiento anual de 42%.

Ejemplo 14

Supóngase en el ejemplo 12 un capital de $10000 invertido durante 90 días, demuestre numéricamente la equivalencia entre la tasa de interés y de descuento.

Solución

El valor acumulado del capital con la tasa de rendimiento es la siguiente:

$$S = C\,(1 + it)$$

$$S = 10000\left(1 + \frac{0.42}{360}\,(90)\right)$$

$$C = \$11050$$

El valor acumulado del capital con tasa de descuento es la siguiente:

$$S = C\,(1 - dt)^{-1}$$

Al despejar S en la expresión [2.6]

$$\Rightarrow S = 10000\left(1 - \frac{0.38009}{360}\,(90)\right)^{-1}$$

$$S = \$11050$$

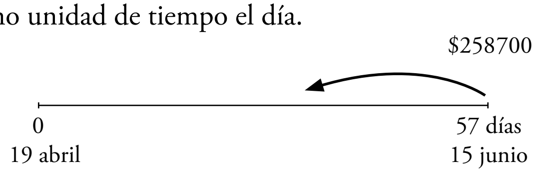
$\therefore$ Los intereses generados con tasa de descuento son los mismos que se generan con tasa de interés debido a que ambas tasas son equivalentes. Asimismo, obsérvese que pueden existir procesos de acumulación con tasa de descuento y procesos de acumulación de capital con tasa de interés.

Ejemplo 15

Un fabricante pidió prestado $258700 a un banco el 19 de abril. El préstamo se descontó a 2.16 % mensual y se tiene que liquidar el 15 de junio. ¿Qué cantidad recibió el fabricante?

Solución

Se considerará como unidad de tiempo el día.



$$C = S\,(1 - dt)$$

$$C = \$258\,700\left(1 - \frac{0.0216}{30}\,(57)\right)$$

$$C = \$248\,082.95 \quad \text{cantidad que recibió el fabricante}$$

Ejemplo 16

¿Qué tasa de rendimiento obtiene una empresa de factoraje financiero que utiliza una tasa de descuento de 31% en todas sus operaciones de descuento a 45 días de plazo?

Solución

Se pide encontrar una tasa de rendimiento equivalente a la de descuento de 31%.

La unidad de tiempo será el día.

Al emplear la relación de equivalencia entre d e i [2.8a] se obtiene lo siguiente:

$$(1 - dt)^{-1} = (1 + it)$$

$$\left(1 - \frac{0.31}{360}(45)\right)^{-1} = \left(1 + \frac{i}{360}\,(45)\right)$$

$$\frac{(1.040312094 - 1)\,360}{45} = i$$

$$i = 0.3224967$$

$\therefore$ 32.24% La tasa de rendimiento que obtiene la empresa de factoraje financiero es de 32.24967% anual.

Ejemplo 17

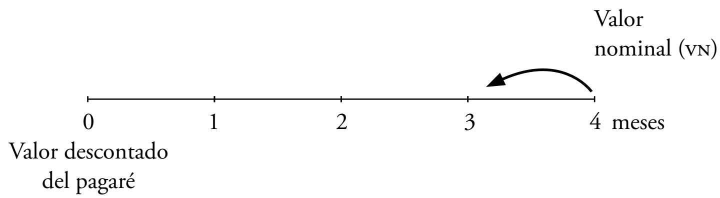
¿Cuál es el valor nominal de un pagaré,[4] si cuatro meses antes de su vencimiento se paga por él \$14 280 en un banco que opera con descuentos de 48%?

Solución

En una operación de crédito el valor nominal de un documento incluye los intereses y el capital prestado.

[4] Un pagaré es un documento que constituye una promesa de pago que suscribe el deudor a favor del acreedor.

Las obligaciones que se mencionan se expresan en el siguiente diagrama de tiempo:



El modelo $C = S\,(1 - dt)$ se transforma en:

$$C = VN\,(1 - dt)$$

Si la unidad de tiempo es el día, tenemos que:

$$14280 = VN\left[1 - \frac{0.48}{360}(120)\right]$$

$$VN = 14280\left[1 - \frac{0.48}{360}(120)\right]^{-1}$$

$$VN = 17000$$

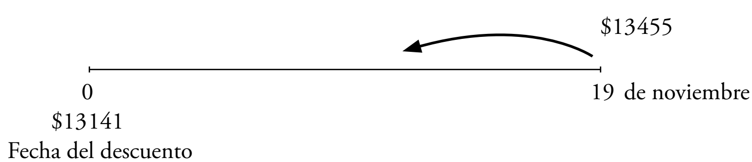
∴ El valor nominal del pagaré, del cual se descontó una tasa de 48%, es de $17000.

Ejemplo 18

Calcule en qué fecha se descontó un pagaré con valor de vencimiento por $13455 y fecha de vencimiento 19 de noviembre, si se recibieron $13141 y la tasa de descuento fue de 15% semestral.

Solución

La unidad de tiempo será el día.



$$C = S(1 - dt)$$

$$\$13141 = \$13455\left(1 - \frac{0.15}{180}(t)\right)$$

$$\left(\frac{\frac{\$13141}{\$13455} - 1}{\frac{0.15}{180}}\right)(-1) = t$$

$$t = 28$$

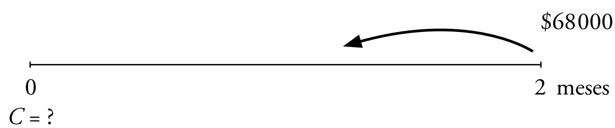
Si se considera el mes de 30 días, la fecha en que se descuenta el pagaré es el 22 de octubre

Ejemplo 19

Usted transfirió un pagaré a un prestamista particular. El documento tiene un valor de vencimiento por $68 000 y vence dentro de 2 meses. Si el prestamista desea obtener una tasa de rendimiento de 60% anual, obtenga la tasa de descuento y el valor efectivo que usted recibe del prestamista.

Solución

Primero se encontrará la equivalencia de tasas y después se calculará el valor descontado del pagaré que usted recibe al momento de venderlo al prestamista. La unidad de tiempo es el mes.



$$(1 - dt) = (1 + it)^{-1}$$

$$\left(1 - \frac{d}{12}(2)\right) = \left(1 + \frac{0.60}{12}(2)\right)^{-1}$$

$$\left[\frac{(0.9090909091 - 1)\,12}{2}\right](-1) = d$$

$$d = 0.545455$$

$\therefore\ d = 54.54\%$ Una tasa de descuento de 54.5455% anual es equivalente a una tasa de rendimiento de 60% anual (se cumple $i > d$).

El valor en efectivo que usted recibe en el momento del descuento es el siguiente:

$$C = S\,(1 - dt)$$

$$\mathrm{C} = \$68{,}000\left(1 - \frac{0.545455}{12}(2)\right)$$

$$C = \$61\,818.18$$

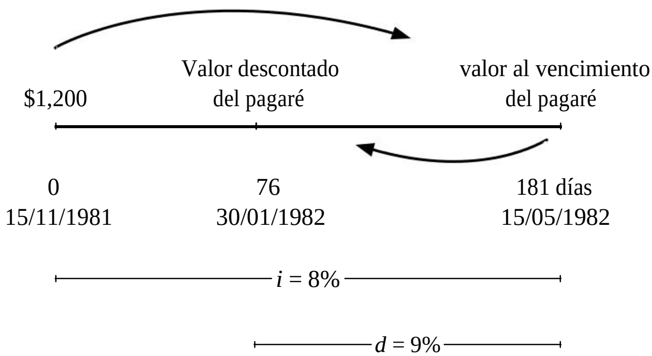
Ejemplo 20

Una compañía posee un pagaré por $1 200 fechado el 15 de noviembre de 1981, con vencimiento a 6 meses e interés de 8%. Si la compañía descuenta el pagaré el 30 de enero de 1982 en un banco que aplica una tasa de descuento de 9%, ¿qué capital ob-tendría?

Solución

Primero se calcula el valor al vencimiento del pagaré y a partir de éste se obtendrá su valor descontado.

La unidad de tiempo es el día.



$$S = C\,(1 + it)$$

$$S = \$1\,200\left(1 + \frac{0.08}{360}(181)\right)$$

$S = \$1\,248.27$ Valor del pagaré al vencimiento

$$C = S\,(1 - dt)$$

$$C = \$1\,248.27\left(1 - \frac{0.09}{360}(105)\right)$$

$$C = \$1\,215.50$$

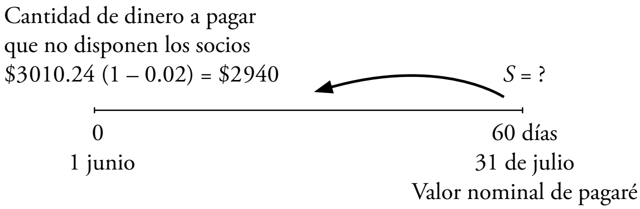
∴ El capital que la compañía obtendría al descontar el pagaré el 30 de enero de 1982, con una tasa de descuento de 9%, sería de $1 215.50.

Ejemplo 21

El 1 de junio unos socios adquieren mercancía por valor de $3 000 que si pagan al contado les conceden un descuento de 2%. Para aprovechar esta oportunidad firman un pagaré sin interés a 60 días[5] en un banco que carga una tasa de descuento de 14%. ¿Cuál debe ser el valor nominal del pagaré para obtener la cantidad exacta que necesitan para pagar al contado la mercancía?

Solución

Si la unidad de tiempo es el día



Los socios solicitan la cantidad exacta, $2940; sin embargo, pagarán dentro de 60 días una cantidad S desconocida tal que $S > \$2940$

$$C = S(1 - dt)$$

$$\$3000(1 - 0.02) = S(1 - dt)$$

$$S = \$3000\,(1 - 0.02)\left(1 - \frac{0.14}{360}(60)\right)^{-1}$$

$$S = \$2940\left(1 - \frac{0.14}{360}(60)\right)^{-1}$$

$$S = \$3010.24$$

Valor nominal del pagaré: los socios reciben en el momento presente $2940 y pagarán dentro de 60 días $3010.24; el pago de intereses adelantados es de $70.24

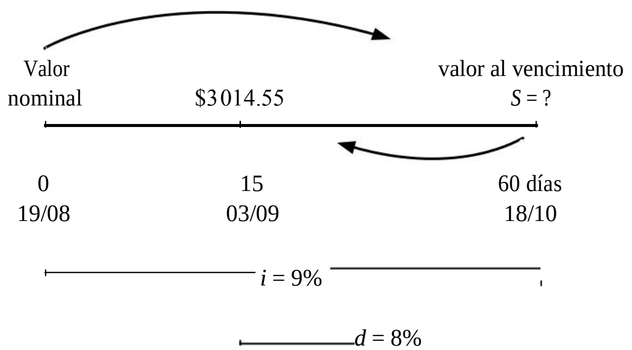
[5] Significa que los socios solicitan la cantidad exacta para pagar la mercancía en ese momento, no significa que el préstamo es sin intereses.

Ejemplo 22

Un pagaré a 60 días con un interés de 9% se firmó el 19 de agosto y se descontó a 8% el 3 de septiembre. Su valor descontado fue de \$3014.55. Determinar el valor nominal del pagaré.

Solución

La unidad de tiempo es el día. Se acumulará el valor descontado, \$3014.55, durante 45 días con la tasa de descuento de 8%; una vez obtenido el valor al vencimiento del pagaré, se calculará, a partir de este valor, el valor nominal.



$$C = S\,(1 - dt)$$
$$\$3014.55 = S\,(1 - dt)$$
$$= S\left(1 - \frac{0.08}{360}\,(45)\right)$$
$$\therefore S = \$3{,}045 \qquad \text{valor al vencimiento del pagaré.}$$

Con este valor se calcula el valor nominal o valor actual del pagaré con tasa de interés.

Como:

$$S = C\,(1 + it)$$
$$\$3{,}045 = C\,(1 + t)$$
$$\$\,3{,}045 = C\,\left(1 - \frac{0.09}{360}(60)\right)$$
$$C = \$3{,}000 \qquad \text{valor nominal del pagaré.}$$

Otra aplicación de la tasa de descuento: compra-venta de Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes)

Los Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes) son los instrumentos de deuda más antiguos emitidos por el gobierno federal. Se emitieron por primera vez en enero de 1978. Pertenecen a la familia de los bonos cupón-cero, es decir, se comercializan a descuento (por debajo de su valor nominal: $10); no devengan intereses y liquidan su valor nominal en la fecha de vencimiento. El inversionista obtiene una ganancia de capital que es la diferencia entre el precio de venta y el precio a los cuales los adquirió. Propiamente no es un instrumento que proporcione rendimientos; sin embargo, para fines informativos, al inversionista se le indica cuál es la tasa de rendimiento equivalente a la tasa de descuento de la emisión.

La alta liquidez de este instrumento del mercado de dinero significa que el poseedor de los títulos los puede vender antes de la fecha de vencimiento mediante un castigo que se aplica al valor nominal del titulo, $10.[6]

En el momento en que el poseedor de los títulos desea adelantar la fecha de vencimiento (desea recuperar su capital y su ganancia), la operación se realiza con la tasa de descuento que fija la ley de la oferta y la demanda del instrumento; ¿cuál es el momento propicio para vender?, ¿cuál es el momento propicio de comprar?

A continuación se muestra el comportamiento del precio del instrumento cuando:

a) Se adquieren los títulos en la fecha de emisión.
b) Se adelanta la fecha de vencimiento.

El precio de venta se calcula suponiendo que la tasa de descuento es la misma con la que se adquirieron y que la tasa vigente en el momento de venta varía.

Para ello se empleará la emisión de Cetes que aparece en la figura 2.5.

Ejemplo 23

Encontrar el precio de compra unitario para la emisión de Cetes a 28 días publicado en los diarios de circulación nacional, el día 14 de diciembre de 2006; el boletín con fines informativos se muestra en la figura 2.5. Supóngase que los títulos se compran en la fecha de emisión. El valor al vencimiento o valor exigible de cada título en la fecha de vencimiento es de $10.

[6] Un documento de crédito tiene dos valores: *a*) el valor escrito en él y que es exigible el día de su vencimiento (llamado también valor nominal); y *b*) el valor que tiene en cualquier momento antes de su vencimiento hecho el descuento (también llamado valor actual o valor real). El valor presente es menor que el valor nominal; el descuento calculado sobre el valor presente se llama descuento matemático o racional; el descuento calculado sobre el valor nominal se llama descuento comercial, que se aplica en la compra-venta de estos títulos (Cetes).

El valor nominal de un Cete es el valor final incluyendo intereses y por tanto corresponde al *monto*; tiene un valor de $10.

Figura 2.5
Mensaje publicado en los diarios
de circulación nacional el 14 de diciembre de 2006. Cetes.

Este mensaje aparece con fines informativos

EL GOBIERNO FEDERAL, POR CONDUCTO DE LA SECRETARIA DE HACIENDA Y CREDITO PUBLICO EMITE,

BI070111 BI070315

BI070607

CERTIFICADOS DE LA TESORERIA DE LA FEDERACION

con valor de

$ 12,000'000,000.
(DOCE MIL MILLONES DE PESOS)

Fecha de la Emisión	14 de diciembre de 2006
Fecha de Vencimiento	11 de enero de 2007
Plazo	28 días
Valor Nominal	$10.00
Tasa de Descuento	6.99%
Tasa de Rendimiento	7.03%

$ 14,000'000,000.
(CATORCE MIL MILLONES DE PESOS)

Fecha de la Emisión	14 de diciembre de 2006
Fecha de Vencimiento	15 de marzo de 2007
Plazo	91 días
Valor Nominal	$10.00
Tasa de Descuento	7.00%
Tasa de Rendimiento	7.13%

$ 12,000'000,000.
(DOCE MIL MILLONES DE PESOS)

Fecha de la Emisión	14 de diciembre de 2006
Fecha de Vencimiento	7 de junio de 2007
Plazo	175 días
Valor Nominal	$10.00
Tasa de Descuento	6.92%
Tasa de Rendimiento	7.16%

AGENTE EXCLUSIVO PARA LA COLOCACION Y REDENCION: BANCO DE MEXICO

Estos títulos se pueden adquirir en Casas de Bolsa, o a través de Instituciones de Crédito

Casa de Bolsa BBVA Bancomer, S.A. de C.V. – Valores Finamex, S.A. de C.V. Casa de Bolsa – Banco Nacional de México, S.A. – Banco Santander, S.A. – Deutsche Bank México, S.A.
Scotia Inverlat Casa de Bolsa, S.A. de C.V. – HSBC México, S.A. – Multivalores Casa de Bolsa, S.A. de C.V. – ING Bank (México), S.A. – Vector Casa de Bolsa, S.A. de C.V. – Sociedad Hipotecaria Federal, S.N.C. – Merrill Lynch México, S.A. de C.V. Casa de Bolsa – Banco J.P. Morgan, S.A. – Ixe Casa de Bolsa, S.A. de C.V. – Bank of America México, S.A. – Invex Casa de Bolsa, S.A. de C.V. – Valores Mexicanos Casa de Bolsa, S.A. de C.V. – Barclays Bank México, S.A. – Banco Mercantil del Norte, S.A. – Banco Credit Suisse First Boston (México), S.A.

Solución

Precio de compra (PC) = ? Valor nominal (VN) = $10

0
Fecha de emisión
14 de diciembre de 2006

28 días
Fecha focal
11 de enero de 2007

$$\text{Precio de compra} = \text{Valor nominal } (1- dt)$$

$$PC = 10\left(1 - \frac{0.0699}{360}(28)\right)$$

$$PC = \$9.945633$$

El comprador deberá pagar \$9.945633 por cada título al adquirirlos en la fecha de emisión.

Para ver la relación que existe entre el precio de compra y la tasa de descuento, se presenta en la gráfica 2.5 el precio de compra unitario al adquirir los títulos en la fecha de emisión, el 14 de diciembre de 2006, y el aumento de la tasa de descuento.[7]

Gráfica 2.5
Relación entre el precio de compra de Cetes y la tasa de descuento

Debe observarse que existe una relación inversa entre el precio de compra y la tasa de descuento: *a mayor tasa de descuento menor es el precio de compra: si se desea invertir en Cetes, conviene adquirirlos cuando la tasa de descuento es alta*.

Ejemplo 24

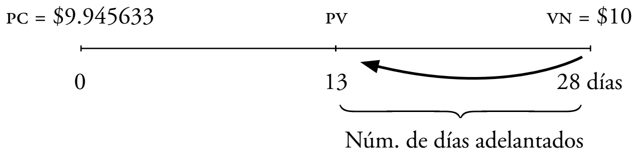
De la misma emisión de Cetes del ejemplo 2.1, encontrar el precio de venta unitario si se adelanta la fecha de vencimiento 15 días.

[7] En la práctica los precios de compra-venta de títulos se operan con ocho o seis decimales, al menos. En la gráfica se muestran sólo dos decimales.

Solución

Este instrumento de deuda opera con las tasas de descuento del mercado, lo que significa que la tasa de descuento que se aplica al momento de vender los títulos puede diferir de la tasa de descuento con la que se adquirieron.

Supóngase que en la operación anterior de Cetes se vendieron con una tasa de descuento 2.5 puntos porcentuales (pp) arriba de la tasa con la que se adquirieron, es decir, 9.49%. El momento de venta se aprecia en el siguiente diagrama:



$$PV = VN\,(1 - dt)$$

$$PV = 10\left[1 - \frac{0.0949}{360}\,(15)\right]$$

$$PV = \$9.960458$$

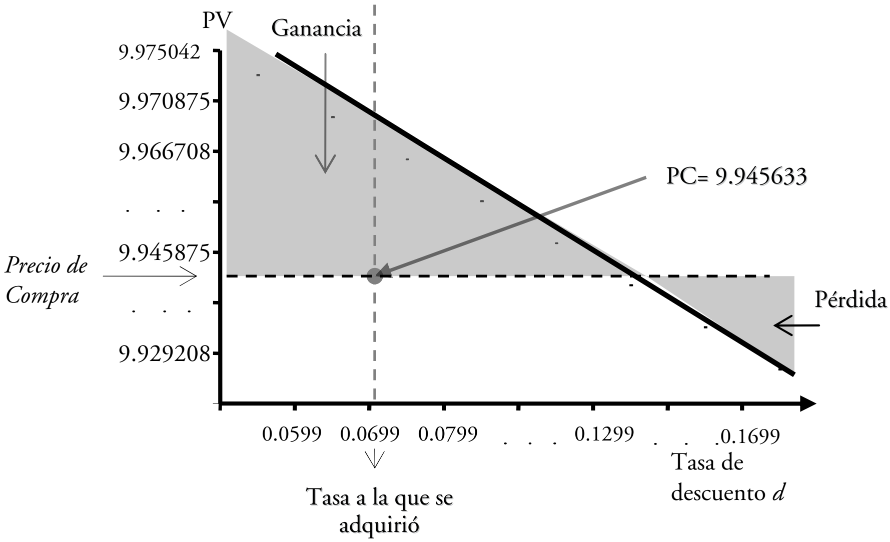
Si la tasa de descuento en el momento de venta de los títulos fuese inferior o superior a la tasa de descuento con la que se adquirieron, el precio de venta variará significativamente. Por ejemplo, en el cuadro 2.3 se muestran los precios de venta a diferentes tasas de descuento y en la gráfica 2.6 se aprecia el comportamiento inverso del precio y la tasa de descuento.

Cuadro 2.3
Precio de venta de Cetes 28
cuando se adelanta 15 días
la fecha de vencimiento

Tasa de descuento	Precio de venta ($)
0.0499	9.979208
0.0599	9.975042
0.0699	9.970875
0.0799	9.966708
…	…
0.1299	9.945875
…	…
0.1699	9.929208

A partir del cuadro 2.3 y de su gráfica, se debe concluir que en una operación de venta le conviene al vendedor (o tenedor de títulos) que la tasa de descuento del mercado sea inferior o igual a la tasa de descuento con la que adquirió los títulos.

Gráfica 2.6
Precio unitario de venta
cuando el título no se retiene hasta el vencimiento
y la tasa de descuento es la que fija el mercado



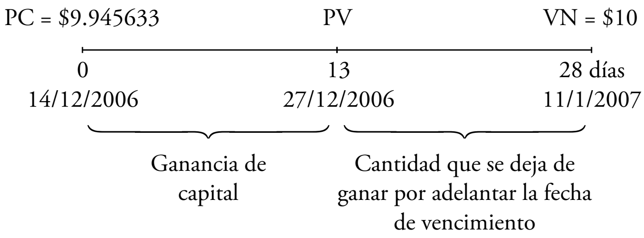
Ejemplo 25

Si se dispone de \$1500000 para invertir en Cetes de acuerdo con las condiciones del boletín informativo de la figura 2.5 y el plazo elegido fuese de 28 días, ¿cuál sería la ganancia de capital si se adquirieran en la fecha de emisión y se vendieran 15 días antes de la fecha de su vencimiento? Se supone que la tasa de descuento para la operación de venta es superior en 2.5 pp a la tasa de descuento con la que se adquieren los títulos en la fecha de emisión.

Solución

La ganancia de capital es el diferencial entre el precio de venta y el precio de compra del título; falta calcular el precio de venta y el número total de títulos a adquirir con el capital disponible. Se trabajará con precios unitarios para calcular posteriormente la ganancia total.

Los precios de compra-venta se ubican en el siguiente diagrama:



La ganancia de capital (GC) es la diferencia entre el precio de venta (PV) y el precio de compra (PC); así la ganancia de capital unitaria es la siguiente:

$$GC_u = PV_u - PC_u$$

Basta calcular el precio de venta unitario; éste ya se calculó en el ejercicio 23 y es de $9.960458.

Para calcular el número de títulos a adquirir, se tiene:

$$\frac{\text{Capital}}{\text{Precio unitario de compra}} = \frac{\$1\,500\,000}{\$9.945633}$$

$$= 150\,819.96 \text{ títulos}$$

Por lo tanto, el número de títulos a adquirir con el capital disponible de la emisión de Cetes del 14 de diciembre de 2006 a 28 días es de 150 819 (sólo se pueden adquirir títulos completos).

Así, la ganancia de capital total cuando se invierte $1 500 000 en Cetes a 28 días con una tasa del 6.99% y se retienen durante 13 días, es decir, si se adelanta 15 días la fecha de vencimiento, es la siguiente:

$$\begin{aligned} GC_{total} &= (PV_u - PC_u)\, \textit{Núm. de títulos} \\ &= (\$9.960458 - \$9.945622)\ 150\,819 \\ &= \$2\,235.89 \end{aligned}$$

La ganancia total anterior se obtuvo bajo la suposición de que la tasa de descuento en la operación de venta era superior en 2.5 pp a la tasa de descuento con la que se adquirieron los títulos.

Ejemplo 26

Verifique numéricamente que la tasa de descuento de la emisión de Cetes de la figura 2.5, correspondiente al plazo de 28 días, es de 7.03%, la cual aparece en el boletín publicado.

Solución

En la figura 2.5 se informa que la tasa de descuento a 28 días es de 6.99%. Se empleará la igualdad [2.8a].

$$(1 + it) = (1 - dt)^{-1}$$

$$\left(1 + \frac{i}{360}(28)\right) = \left(1 - \frac{0.0699}{360}(28)\right)^{-1}$$

$$\left(1 + \frac{i}{360}(28)\right) = 1.00546638$$

$$i = 0.070282$$
$$\therefore\ i = 7.03\%$$

La tasa de rendimiento de 7.03% es la que ofrece la emisión de Cetes a 28 días del boletín publicado; véase la figura 2.5. En otras palabras, el inversionista en Cetes obtiene un rendimiento de 7.03% que equivale a una tasa de descuento de 6.99%.

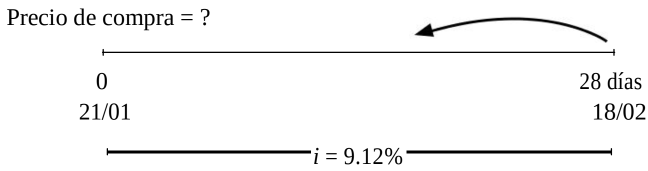
Ejemplo 27

El 21 de enero se lanza una emisión de Cetes con fecha de vencimiento 18 de febrero y una tasa de descuento de 9.12% anual. Una persona desea invertir $1 000 000 en Cetes de esta emisión. Calcule:

a) El precio de un Cete (precio unitario).
b) El número de Cetes comprados.
c) La ganancia total obtenida.
d) La tasa de rendimiento.

Solución

Las obligaciones en la compra-venta del instrumento aparecen en el siguiente diagrama:



a) Precio de compra de un Cete:

$$PC = VN\,(1 - dt)$$
$$PC = 10\left(1 - \frac{0.0912}{360}(28)\right)$$
$$PC = \$9.929067$$

b) Número de Cetes que se adquirieron:

$$\frac{\$1\,000\,000}{\$9.929067} = 100\,714 \longrightarrow \text{Núm. de Cetes comprados}$$

c) Ganancia de capital total:

$$GC = (P.\ Venta - P.\ Compra)\ (Núm.\ de\ títulos)$$
$$GC = (10 - 9.929067)\ (100\,714)$$
$$GC = \$7\,143.97$$

d) La tasa de rendimiento equivalente se puede calcular empleando la expresión [2.8b]:

$$(1 - dt)^{-1} = (1 + it)$$
$$\left(1 - \frac{0.0912}{360}(28)\right)^{-1} = \left(1 + \frac{i}{360}(28)\right)$$
$$(-1)\ \frac{(1.007144008 - 1)\ 360}{28} = i$$

$$i = 0.0918515$$
$$\therefore\ i = 0.0918515 \quad \text{Tasa de rendimiento equivalente}$$
$$i = 9.185\% \quad \text{a la tasa de descuento de 9.12\% anual de Cetes a 28 días}$$

Ejercicios propuestos

Interés simple

1. Encuentre el interés ordinario sobre $6 000 durante 30 días a cada una de las tasas de interés proporcionadas. Observe cuidadosamente la relación entre las respuestas.
   a) 5%, b) 10%, c) 15%, d) 7.5%.
   Sol.: a) $25, b) $50, c) $75, d) $37.50.
2. Calcular el interés ordinario de una deuda de $6 000 a 5% para cada uno de los periodos proporcionados. Observe cómo un cambio en el tiempo afecta el interés.
   a) 120 días, b) 240 días, c) 480
   días. Sol.: a) $100, b) $200, c) 400.
3. Si el dinero se evalúa al 10% de interés simple, encuentre el valor de una deuda de $1 500 que se vence en 6 meses a la tasa de interés de 12%.
   a) ahora, b) dentro de 4 meses.
   Sol.: a) $1 514.29, b) $1 563.93.
4. Se desea obtener un monto de $50 000 al final de 9 meses mediante 2 depósitos. El primero de inmediato por $25 000 y el segundo dentro de 3 meses por un importe desconocido; si la tasa que paga el banco es de 5% semestral, encontrar el valor del segundo depósito. Considere como fecha de valuación el noveno mes.
   Sol.: $22 023.81.
5. Si se invierte un capital de $1 000 000 durante 90 días a una tasa de interés de 4.1705% anual bajo el modelo de interés simple, a) calcular los intereses ganados, y b) el valor acumulado del capital.
   Sol.: a) $10 426.25, b) $1 010 426.25.
6. Una deuda de $12 000 se liquidará mediante tres pagos a efectuarse de la siguiente forma: $3 000 dentro de dos meses; $5 000 dos meses después y un pago adicional 3 meses más adelante. Encuentre la cantidad del pago adicional si la tasa de interés es del 6% anual. Use el interés ordinario. Tome como fecha el séptimo mes de evaluación.
   Sol.: $4 270.
7. ¿Cuál es el importe del pago mensual por la adquisición de un auto nuevo cuyo precio de contado es de 39 900 dólares, si se adquiere mediante un enganche de 35% del precio de contado y el plazo es de un año? Considérese que la tasa de interés es de 15.99% fija y la fecha de valuación el momento presente.
   Sol.: 2 344.23 dls.
8. ¿Qué capital se convertirá en $3 600 en 60 días si la tasa de interés efectiva mensual es de 11%?
   Sol.: $2 950.81.

9. El 20 de agosto del 2006, Banco Premium le concede un préstamo por $10000 a la empresa Innovaciones, S. A., la cual firma un pagaré al 15% anual con vencimiento el 15 de mayo de 2007. El día 12 de diciembre Banco Premium vende el pagaré a la empresa La Antigua, S. A., cobrando una tasa de interés de 18% anual. Determinar:
   a) ¿Cuál es el valor que paga La Antigua, S. A., al Banco Premium?
   b) ¿Cuál es la cantidad que deja de ganar el banco por vender el pagaré antes de la fecha de vencimiento?
   c) ¿Cuál es la tasa de rendimiento que gana el Banco Premium?
   d) ¿Cuánto paga Innovaciones, S. A., en la fecha de vencimiento?
   Sol.: a) $10,321.86, b) $794.79, c) 10.16%, d) $11,116.67.
10. Un pagaré con valor nominal de $7200 tiene fecha del 5 de febrero. Vence el 8 de diciembre con un interés a 10%. Después de que fue firmado el pagaré, la tasa del mercado se incrementó un punto porcentual. ¿Cuál es el valor actual del pagaré al 3 de noviembre a la tasa de mercado? Use la regla bancaria.
    Sol.: $7,729.33.
11. Si se invierten $7,000 a 10% efectivo trimestral, ¿cuánto tiempo se necesitará antes de que la inversión tenga un valor de $7,250?
    Sol.: 32 días aproximadamente.
12. El 31 de octubre de 2007 un trabajador firmó un pagaré a la empresa X por $150,000 a 100 días con una tasa de interés de 6%. Posteriormente, el día 20 de diciembre del mismo año, la compañía X se lo ofrece al banco BCHC quien desea ganar 8%, ¿cuánto recibe por el pagaré la empresa X? Use la regla bancaria.
    Sol.: $150,824.12.
13. Del ejercicio anterior, ¿cuál es la tasa de rendimiento anual que gana la impresa X?
    Sol.: 3.95% anual.
14. Encuentre el tiempo durante el cual se acumulan por concepto de intereses $2500 por un capital de $100,000 a una tasa fija de 15% mensual.
    Sol.: 5 días.

Descuento simple

15. ¿Cuántos días faltan para el vencimiento de un pagaré firmado por $500,000 si se vendió en $485,600 a una tasa de descuento de 20% anual?
    Sol.: 52 días.
16. Usted desea invertir $1'000,000 en Cetes emitidos el 13 de mayo del 2007 a un plazo de 336 días; la tasa de descuento ofrecida por el gobierno federal es de 7.50%.

a) ¿Cuál es el precio de compra por cada título si lo adquiere en la fecha de emisión?
b) ¿Cuántos títulos se adquieren?
c) Si se adelanta la fecha de vencimiento 175 días, ¿cuál es la ganancia de capital?
d) ¿Cuál es el importe del descuento? Suponga que la tasa de descuento es la misma con la que se adquirieron.

Sol.: a) 9.30, b) 107526 títulos, c) $36,065.73, d) $39,202.47

17. Calcular la tasa de rendimiento equivalente a la tasa de descuento de 7.50% para los Cetes del ejercicio 16.

    Sol.: 8.0645%.

18. Se descuenta un pagaré con valor de $150,000 en 90 días. El banco carga una tasa de descuento simple de 15%. Determinar el capital utilizado: a) El método exacto, b) El método aproximado u ordinario.

    Sol.: a) $144,452.05, b) $144,375.00

19. Un cliente compra mercancía con valor de $200,000 (precio de contado). La empresa Torres, S. A., le otorga crédito a 4, 6 y 8 meses por medio de la firma de pagarés, cada uno por un mismo importe y con una tasa de interés anual simple de 35%. Dos meses después, la empresa Torres, S. A. decide descontar estos tres pagarés en un banco para tener efectivo inmediato. Si el banco aplica una tasa simple anual de descuento de 45% sobre el valor de cada pagaré, ¿Cuánto dinero recibe la empresa Torres, S. A? Considérese como fecha de valuación el momento presente para encontrar el importe de cada pagaré:

    Sol.: $199,421.56. Importe de cada pagaré: $78,204.57

20. Un documento se firmó el 3 de agosto para vencerse el 15 de noviembre del mismo año, con un valor al vencimiento de $15,000, cobrándose una tasa de descuento anual simple de 15%, ¿cuál es el valor presente de la operación si: a) se usa un des-cuento ordinario, b) se usa un descuento exacto, c) se usa un descuento bancario?

    Sol.: a) $14,362.50, b) $14,358.90, c) $14,350.

21. Se solicita un préstamo de $1,000 durante 10 meses a un banco; éste cobra una tasa de descuento de 25% anual, ¿Cuál es la cantidad que recibe el deudor si: a) el descuento es simple, b) el descuento es simple exacto?

    Sol.: a) $791.67, b) $794.52.

22. Usted tiene derecho a recibir $15,000, $20,000 y $35,000 en 4, 6 y 7 meses respectivamente; sin embargo, desea recibir en una sola exhibición ese dinero hoy; por no esperar a la fecha del vencimiento se le aplicará una tasa de descuento de 15%, ¿Cuál es el valor presente de las tres deudas?

    Sol.: $64,687.50

Conviene recordar

1. La función lineal del capital modela la acumulación de éste mediante la reincorporación de los intereses si se calculan a partir del capital inicial.

2. Los intereses y la tasa de interés se pagan al final de cada periodo, es decir, hay un tiempo de espera para su pago.

3. Si no se especifica la fecha de operación con día y mes al menos, se sobre entiende que se empleará la regla ordinaria (año de 360 días y meses de 30).

4. El descuento y la tasa de descuento se pagan al inicio de cada periodo.

5. El capital o valor presente siempre es menor que su valor futuro.

6. La tasa de descuento se puede interpretar como una tasa de interés que se paga por adelantado.

7. A cada tasa de descuento le corresponde una tasa de interés y viceversa (para cada tasa de descuento hay una tasa de interés equivalente y viceversa).

8. Si dos tasas de interés i y de descuento d son equivalentes, la de interés siempre es mayor.

9. Dos tasas son equivalentes si producen el mismo valor futuro a partir del mismo capital durante el mismo plazo. La equivalencia puede ser entre dos tasas de interés, dos tasas de descuento o entre una de interés y una de descuento.

10. El proceso de acumulación de capital puede ser con tasa de interés o con tasa de descuento.

11. El proceso de desacumulación (o descuento) puede ser con tasa de interés o con tasa de descuento.

Fórmulas financieras

Interés

$I = Cit$

$I = S - C$

Básica

Valor futuro

(valor acumulado o monto)

$$S = C\underbrace{(1 + it)}_{\text{Factor de acumulación en el interés simple con tasa efectiva de interés}}$$

$$C = S\underbrace{(1 + it)^{-1}}_{\text{Factor de descuento en el interés simple con tasa efectiva de interés}}$$

Tasa efectiva

$$i = \left[\frac{S}{C} - 1\right]\left[\frac{1}{t}\right]$$

$$i = \left[\frac{S - C}{C}\right]\left[\frac{1}{t}\right]$$

$$\therefore \quad i = \frac{I}{Ct}$$

Plazo de la operación

$$t = \left[\frac{S}{C} - 1\right]\left[\frac{1}{i}\right]$$

$$t = \left[\frac{S - C}{C}\right]\left[\frac{1}{i}\right]$$

$$\therefore \quad t = \frac{I}{Ci}$$

Fórmulas financieras

Descuento

$D = Sdt$

$D = S - C$

Básica

Valor descontado

o Valor presente

$$C = S\underbrace{(1 - dt)}_{\text{Factor de descuento en el descuento simple con tasa efectiva de descuento}}$$

$$S = C\underbrace{(1 - dt)^{-1}}_{\text{Factor de acumulación en el descuento simple con tasa efectiva de descuento}}$$

Tasa efectiva

$$d = \left[1 - \frac{C}{S}\right]\left[\frac{1}{t}\right]$$

$$d = \left[\frac{S - C}{S}\right]\left[\frac{1}{t}\right]$$

$$\therefore \quad d = \frac{D}{St}$$

Plazo de la operación

$$t = \left[1 - \frac{C}{S}\right]\left[\frac{1}{d}\right]$$

$$t = \left[\frac{S - C}{S}\right]\left[\frac{1}{d}\right]$$

$$\therefore \quad t = \frac{D}{Sd}$$

Fórmulas financieras

Equivalencia entre tasas de interés y de descuento

$$\text{Si } (1 + i \cdot t)^{-1} = (1 - dt)$$

$$\Rightarrow 1 - (1 + it)^{-1} = dt$$

$$\frac{(1 + it) - 1}{1 + it} = dt$$

$$\left[\frac{it}{1 + it}\right]\left[\frac{1}{t}\right] = d$$

$$\boxed{\therefore \quad \frac{i}{1 + it} = d}$$

$$\text{Si } (1 + it)^{-1} = (1 - dt)$$

$$\Rightarrow (1 + it) = (1 - dt)^{-1}$$

$$it = \frac{1}{(1 - dt)} - 1$$

$$it = \frac{1 - (1 - dt)}{(1 - dt)}$$

$$i = \left[\frac{dt}{(1 - dt)}\right] \cdot \frac{1}{t}$$

$$i = \frac{d}{(1 - dt)}$$

Nota: se sugiere recordar sólo las expresiones de los recuadros blancos; son básicas porque las variables se obtienen mediante sencillos pasos algebraicos.

Capítulo 3
Interés compuesto

Introducción

Cuando un banco o cualquier otra institución financiera aumentan el número de periodos en el año en los que pagan intereses, ¿el capital aumenta más rápidamente mientras más pequeños son esos periodos? Si un inversionista recibe intereses cuatro veces al año sobre su capital, ¿es mejor si los recibiera sólo una vez al año? Si dos bancos ofrecieran las mismas tasas de interés pero éstas difirieran en el número de periodos de pago de intereses, ¿estarían ofreciendo los mismos rendimientos?

Éstas son algunas preguntas cuyas respuestas dependen de la forma en que se acumula el capital.

El objetivo de este capítulo es mostrar el proceso de acumulación del capital en el que los intereses generados se reincorporan al capital para producir nuevos intereses. Al finalizar el capítulo, el lector será capaz de seleccionar entre el modelo de interés simple y el compuesto para que a partir de la tasa nominal de interés y el plazo de la operación obtenga los más altos rendimientos, así como elegir el mejor rendimiento a partir del cálculo de tasas de interés equivalentes.

Al proceso de acumulación del capital que se verá en esta unidad se le conoce también como *régimen de capitalización*.

3.1 Valor acumulado de un capital

La función de acumulación del dinero en un régimen de capitalización supone que el interés generado en cada periodo se reinvierte automáticamente: se añade al capital que lo generó para producir a su vez nuevos intereses.

Se mostrará el proceso de acumulación a partir de una tasa i efectiva por periodo y con una tasa nominal i^m pagadera m veces al año.[1]

[1] El superíndice m no es un exponente; sirve para denotar el número de veces que se paga la tasa i al año.

Supóngase que se invierte un capital C durante t periodos a la tasa de interés efectiva i por periodo; el valor acumulado $S(t)$ del capital C al final del periodo t se muestra a continuación:

Valor acumulado del capital al final del primer periodo, $S(1)$:

$$S(1) = \underbrace{C} + \underbrace{Ci} = C(1+i)$$

Valor acumulado en el periodo inmediato anterior: es el capital original

Interés sobre el capital original (principal)

Valor acumulado del capital C al final del segundo periodo $S(2)$:

$$S(2) = \underbrace{C(1+i)} + \underbrace{C(1+i)\,i} = C(1+i)^2$$

Valor acumulado al final del 1er. periodo (incluye interés generado durante el 1er. periodo). Representa el nuevo o capital para el 2o. periodo

Interés generado sobre el nuevo capital

Valor acumulado del capital C al final del tercer periodo $S(3)$:

$$S(3) = \underbrace{C(1+i)^2} + \underbrace{C(1+i)^2\,i} = C(1+i)^3$$

Valor acumulado al final del 2o. periodo (incluye interés generado durante el 2o. periodo). Representa el nuevo capital para el 3er. periodo

Interés generado sobre el nuevo capital

Valor acumulado del capital al final del t-ésimo periodo (el último periodo) $S(t)$:

$$S(t) = \underbrace{C(1+i)^{t-1}} + \underbrace{C(1+i)^{t-1}\,i} = C(1+i)^t$$

Valor acumulado al final del $(t-1)$-ésimo periodo (incluye interés generado durante el $(t-1)$-ésimo periodo). Representa el nuevo capital para el t-ésimo periodo

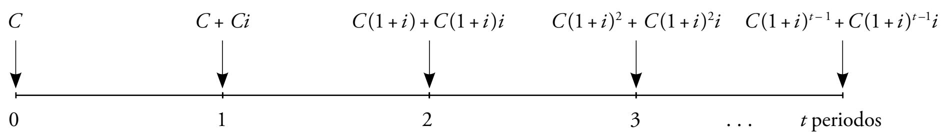
Interés generado sobre el nuevo capital

$\therefore$ la función de acumulación de un capital C invertido a la tasa efectiva i por periodo durante t periodos es:

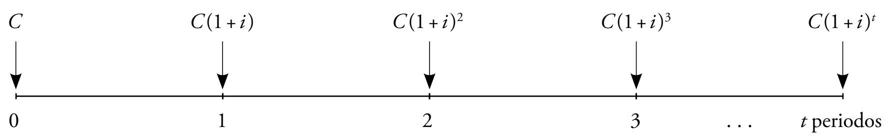
$$S(t) = C(1 + i)^t \quad \text{para} \quad t > 0 \qquad [3.1]$$

El factor $(1 + i)$ se llama *factor de acumulación para el régimen de capitalización*.

Debe observarse en esta última expresión que en apariencia los intereses se calculan sobre el capital original, C, lo que podría interpretarse de manera errónea como interés simple; sin embargo, los intereses se calculan sobre el nuevo capital obtenido en el periodo inmediato anterior, como se mostró durante el proceso de acumulación. Esta función de acumulación es creciente, continua y valuada en el momento $t = 0$ que corresponde al capital C inicial. A continuación se muestra el proceso de acumulación arriba mencionado; se utiliza un diagrama de tiempo que indica cómo se reincorporan los intereses al nuevo capital.



Si se efectuan las factorizaciones correspondientes, lo anterior se convierte en:



La expresión $C(1 + i)^t$ al final del periodo t corresponde al valor acumulado buscado.

La expresión [3.1] involucra también a las cuatro variables: valor acumulado (o valor futuro) del capital, $S(t)$; al capital, C; a la tasa de interés i efectiva por periodo y al número de periodos de la operación (plazo), t. Basta hacer el despeje algebraico respectivo en la expresión [3.1] para obtener cualquiera de estas variables.

Por ejemplo: ¿qué cantidad debe invertirse hoy —el momento presente— para acumular un capital $S(t)$ durante t periodos a la tasa de interés i efectiva por periodo? Es decir, se desea conocer el valor del capital, C, el cual se obtiene al despejar C en [3.1]:

$$C = \frac{S(t)}{(1 + i)^t} = S(t)\ (1 + i)^{-t} \qquad [3.2]$$

En adelante la expresión [3.1] simplemente se escribirá:

$$S = C(1 + i)^t \qquad [3.3]$$

para denotar el valor acumulado S de un capital C invertido durante t periodos a una tasa efectiva i por periodo.

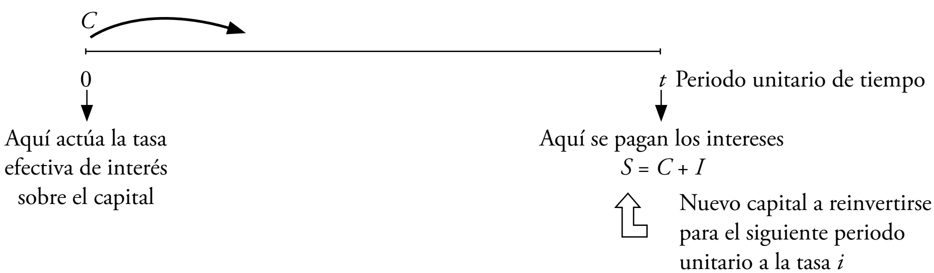
Por lo tanto, la expresión [3.2] se escribirá:

$$C = \frac{S}{(1 + i)^t} \quad \text{o} \quad C = S(1 + i)^{-t} \qquad [3.4]$$

3.2 Tasas de interés y sus características

Existen dos medidas del interés ganado por un capital durante cierto periodo de tiempo, t, expresadas como tasas: la *tasa efectiva de interés* y la *tasa nominal de interés*. La primera es la que se ha trabajado a lo largo de este documento; la segunda hace su aparición ahora.

El proceso de acumulación del capital bajo el efecto de una tasa efectiva de interés se muestra gráficamente a continuación:



Este diagrama muestra la acción de una tasa efectiva por periodo unitario de tiempo, la cual puede ser la misma para el siguiente periodo unitario, o cambiar, como suele ocurrir en la práctica.

Ejemplos que muestran cómo se acumula el capital bajo el efecto de una tasa efectiva de interés

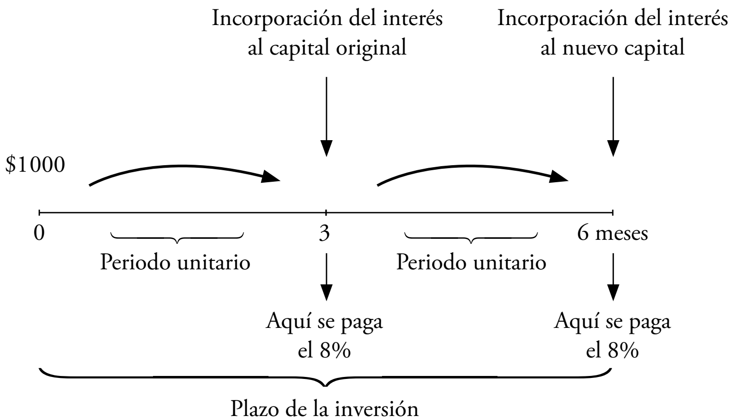
Ejemplo 1

Un capital de $1 000 se invierte durante seis meses. Encontrar el importe de los intereses ganados por el capital si se paga:

a) Una tasa efectiva de 8% trimestral.
b) Una tasa efectiva de 8% anual.
c) Una tasa efectiva de 8% semestral.

Solución

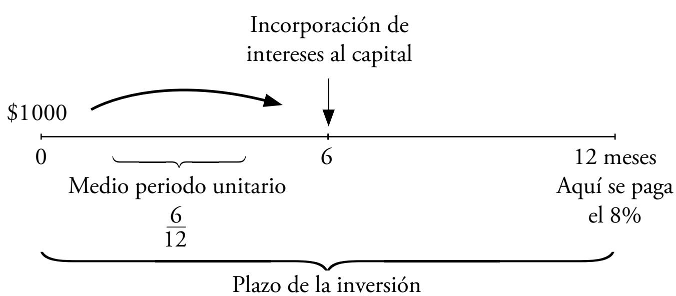
a) La unidad o periodo unitario de tiempo es de tres meses; al final de cada periodo de tres meses se pagarán intereses para su reincorporación al capital que los generó; como el plazo es de seis meses, se pagarán intereses durante dos periodos unitarios de tiempo.



El valor acumulado de la inversión será bajo estas condiciones:

$$S = 1000\,(1 + 0.08)^2 \longrightarrow \text{Plazo expresado en periodos unitarios de tiempo}$$
$$S = \$1\,166.40$$

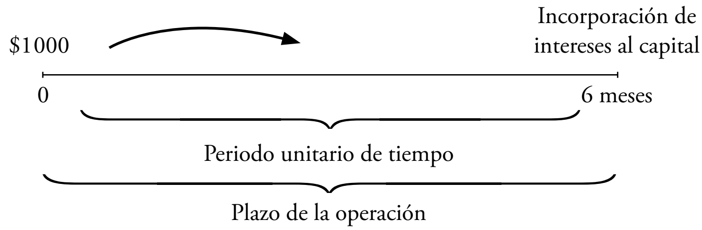
b) La unidad o periodo unitario de tiempo es el año al final del cual habrá capitalización de intereses; como el plazo es de seis meses, sólo se pagarán intereses durante medio periodo unitario de tiempo:



El valor acumulado de la inversión bajo estas condiciones:

$$S = 1000\ (1 + 0.08)^{\frac{6}{12}} \longrightarrow \text{Plazo expresado en periodos unitarios de tiempo}$$
$$S = \$1\,039.23$$

c) La unidad o periodo unitario de tiempo es el semestre; al final de seis meses habrá reincorporación de intereses al capital, periodo que coincide con el plazo de la operación, por lo que se pagarán intereses en una ocasión.



En el cuadro 3.1 se resumen los intereses ganados por la inversión por cada tasa efectiva.

$$S = 1000\ (1 + 0.08)^{1} \longrightarrow \text{Plazo expresado en periodos unitarios de tiempo}$$
$$S = \$1\,080$$

Cuadro 3.1
Valor acumulado de un capital con diferentes tasas efectivas obtenidas a partir de una misma tasa nominal

Tasa	**Tasa efectiva**	**Valor acumulado al final de seis meses** $S = 1000\,(1 + i)\,t$	**Intereses ganados al final de seis meses** $I = S - C$
8%	Trimestral	$1 166.40	$166.40
8%	Semestral	$1 080.00	$80.00
8%	Anual	$1 039.23	$39.23

Los resultados anteriores, todos diferentes, provienen de una tasa de 8%, pero el tiempo en que se capitalizan los intereses es diferente; el periodo de capitalización al que hace referencia la tasa efectiva (trimestre, semestre y año en el ejemplo) determina la acumulación del capital durante el plazo de la inversión, aunque éste sea el mismo en cada caso. Por lo tanto, es conveniente identificarlo en los cálculos como unidad de tiempo (o periodo unitario de tiempo).

3.2.1 Tasa nominal de interés

Una *tasa nominal de interés* es una tasa periódica expresada en forma anual. Por ello también se le llama simplemente *tasa anual*.

Es una tasa anual de interés que expresa el interés total pagado en un año sobre una unidad de capital invertida al principio del año, considerando que el interés pagado no se reinvierte.

Una tasa nominal sólo sirve de referencia o comparación, en términos anuales, para la tasa efectiva por periodo de conversión (capitalización) de intereses.

Por ejemplo, una tasa de 12% nominal capitalizable cada trimestre se refiere a la tasa efectiva que se paga cada trimestre (0.12/4 = 0.03); el periodo de capitalización es el trimestre, de allí que haya cuatro ocasiones (porque hay cuatro trimestres en el año) para la reincorporación de intereses al capital para generar, a su vez, más intereses.

El 12% nominal capitalizable trimestralmente no significa que la tasa sea de 12% por trimestre, ni que sea 12% al año. La tasa nominal propiamente no es una tasa (porque no actúa como tal), sino una referencia anual para la tasa efectiva.

3.2.2 Relación de equivalencia entre una tasa nominal y una tasa efectiva

Cuando se habla de tasas nominales, se habla de situaciones en las que el interés se paga con una frecuencia mayor que una vez al año; es decir, una tasa nominal hace referencia al número de veces que el interés ganado en cada periodo se reinvierte para ganar intereses adicionales. Los términos *capitalizable*, *pagadero* y *convertible* que acompañan siempre a una tasa de interés nominal deben entenderse en este sentido. (Véanse los ejemplos del cuadro 3.2.)

Cuadro 3.2
Frecuencias de capitalización y periodos unitarios de pago
Tasas efectivas por periodo unitario

Tasa nominal	Frecuencia de capitalización de los intereses en un año	Periodo de pago (de convertibilidad o de capitalización) de los intereses	Tasa efectiva*
7% pagadero (capitalizable) cada 28 días	$\frac{360}{28} = 12.857$ veces	28 días	$\frac{0.07}{\frac{360}{28}}$
9% pagadero (capitalizable) mensualmente	$\frac{360}{30} = 12$ veces	Mes (30 días)	$\frac{0.09}{12}$
12% pagadero (capitalizable) trimestralmente	$\frac{360}{90} = 4$ veces	Trimestre (90 días)	$\frac{0.12}{4}$
24% pagadero (capitalizable) semestralmente	$\frac{360}{180} = 2$ veces	Semestre (180 días)	$\frac{0.24}{2}$
16% pagadero (capitalizable) cada 182 días	$\frac{360}{182} = 1.978022$ veces	182 días	$\frac{0.16}{\frac{360}{182}}$
15% pagadero (capitalizable) anualmente	$\frac{360}{360} = 1$ vez	Año (360 días)	$\frac{0.15}{1}$

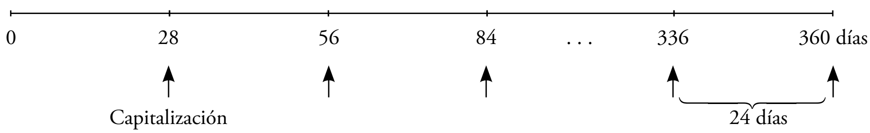
La frecuencia de capitalización de los intereses en el año[2] es importante porque junto con la tasa de interés se determina la magnitud del valor acumulado del capital; tomando dos ejemplos del cuadro 3.2, se ilustrará cómo se subdivide el año para la capitalización de los intereses.

Una tasa de *7% capitalizable cada 28 días* significa que el año de 360 días se subdivide en periodos unitarios de 28 días y al final de cada periodo hay reincorporación de interés al capital para producir nuevos intereses. En los siguientes dos diagramas se observan dos tipos de subdivisión del año y cada flecha significa que al final de cada periodo hay capitalización de intereses.

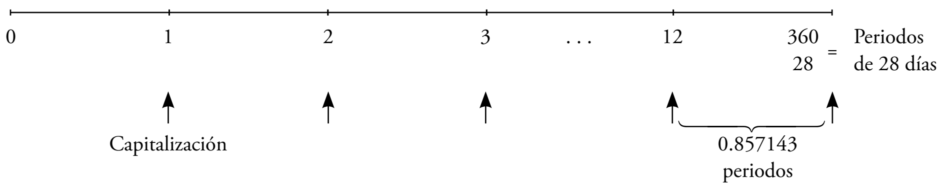
Se pueden expresar los periodos unitarios en días de tal manera que cada uno tenga una longitud de 28 días.

* Para no perder decimales se acostumbra emplear como denominador 360/28 y 360/182 en lugar de 12.857141 y 1.978022, respectivamente.

[2] Se considerará siempre el año de 360 días a menos que se indique otra duración.



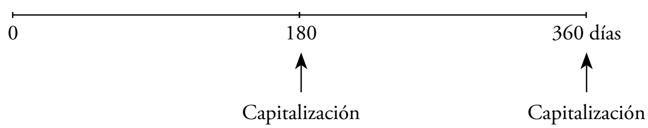
Se puede subdividir el año en número de periodos unitarios de 28 días comprendidos en un año de 360 días.



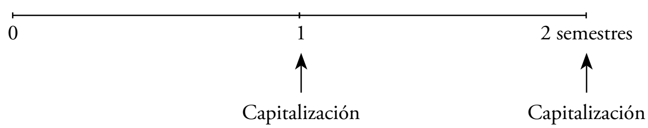
Se debe observar que en un año de 360 días, la tasa de interés que efectivamente se pagará en cada periodo de 28 días será de $\frac{0.07}{\frac{360}{28}} = 0.005444$ durante 12 periodos de 28 días más una fracción de periodo de 24 días (o bien 0.857143 periodos de 28 días).

Finalmente, una tasa de 24% anual capitalizable semestralmente significa que en un año de 360 días se capitalizarán los intereses dos veces.

Gráficamente puede dividirse el año en periodos de 180 días



O bien, puede dividirse el año en dos periodos de 180 días



La tasa de interés que efectivamente se paga en cada periodo (semestre) de capitalización es de $\frac{0.024}{\frac{360}{180}} = 0.12$ y se pagará durante dos periodos de 180 días exactamente.

Con estas precisiones debe notarse que la unidad de tiempo es el periodo de capitalización de intereses; no se habla del plazo de la operación porque éste puede ser diferente —como lo es en la práctica— al periodo de capitalización.

Se acostumbra usar cualquiera de los siguientes símbolos para denotar a la tasa nominal pagadera (convertible o capitalizable) m veces al año:

$$i^m, \quad i^{(m)}, \quad j^{(m)}, \quad j_m$$

donde m es la frecuencia de capitalización (o de convertibilidad) en el año. Obsérvese que m no es un exponente, es simplemente un superíndice o, en su caso, un subíndice.

A partir de la tasa nominal i^m que se capitaliza por periodo (o que se capitaliza m veces al año) se obtiene la tasa efectiva i por periodo de capitalización, $\frac{i^m}{m}$.

Con esta notación los encabezados de las columnas del cuadro 3.1 se expresan de la siguiente manera:

Tasa nominal i^m	Frecuencia de capitalización de los intereses en un año m	Periodo de pago (de convertibilidad o de capitalización) de los intereses m-ésimo	Tasa efectiva $i = \frac{i^m}{m}$

Con base en las definiciones de ambas tasas, una tasa efectiva anual, por ejemplo, implica que sólo se pagan intereses una vez al año con la fuerza i; si hubiese un proceso de reinversión automática y la acumulación fuese la de capitalización, esos intereses se reincorporarían al capital para generar más intereses durante otro año y éstos se pagarían al final del año.

En el caso de una tasa nominal, la fuerza o tasa que realmente —o efectivamente— actúa es i en cada m-ésimo año:

$$i = \frac{i^m}{m} \qquad [3.5]$$

De allí que ambas tasas no sean comparables entre sí; por ejemplo, una tasa efectiva anual de 12% no significa lo mismo que una tasa nominal de 12% capitalizable trimestralmente: la primera se paga una vez al año con la fuerza 0.12, mientras que la nominal paga intereses con la fuerza 0.12/4 = 0.03 en cada trimestre.

Para compararlas debe elegirse el mismo periodo de referencia para el pago de los intereses; generalmente ese periodo de referencia es el año, pero puede ser cualquier otro. Si se elige el año como fecha de referencia, se dice que la tasa se ha *anualizado*.

Las tasas obtenidas se dicen equivalentes *porque producen los mismos intereses actuando sobre el mismo capital durante el mismo plazo*.

Ejemplo para ilustrar el proceso de equivalencia anual

Ejemplo 2

Considérese que se invierte una unidad monetaria y se acumula durante el año, a una tasa de interés efectiva y nominal, respectivamente.

El valor acumulado de $1 invertido hoy durante un año a una tasa efectiva anual i es:

Solución

$$\therefore \text{ el valor acumulado es: } S = \$1.00(1 + i). \qquad [3.6]$$

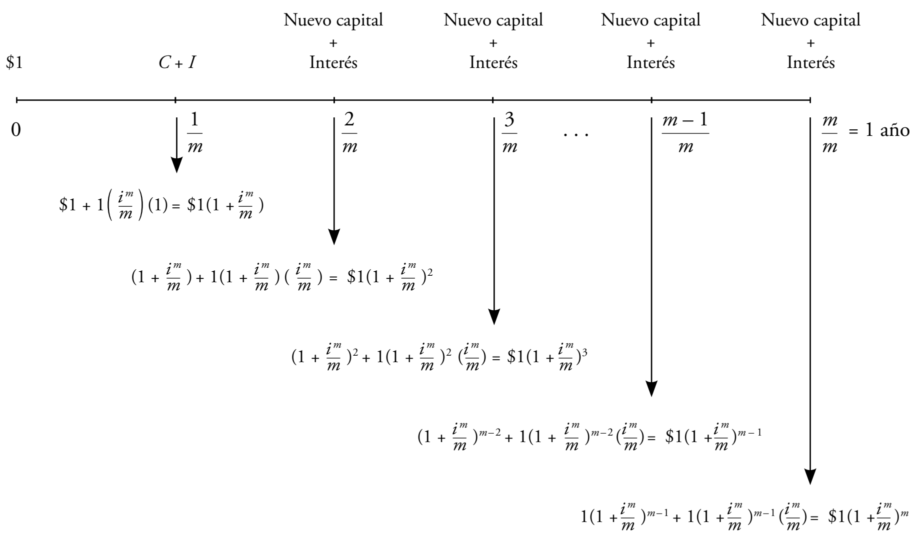
El valor acumulado de $1 invertido hoy, durante un año a la tasa nominal $i^{(m)}$ pagadera m veces en el año, no se obtiene de manera inmediata como en el caso de la tasa efectiva anual —donde se pagan intereses una vez al año—, sino que se debe considerar el pago de interés m veces en el año y la reinversión de esos intereses al final de cada m-ésimo de año hasta completar el año, base de la comparación entre ambas tasas.

Este proceso se ilustrará para cada m-ésimo de año en el diagrama de tiempo de la figura 3.1.

Por lo anterior, el valor acumulado de un peso al final de un año con una tasa $i^{(m)}$ nominal capitalizable m veces en el año es:

$$S = \$1.00\left(1 + \frac{i^m}{m}\right)^m \qquad [3.7]$$

Figura 3.1



Para lograr la equivalencia entre ambas tasas i e $i^{(m)}$ se debe cumplir que produzcan los mismos intereses durante el mismo plazo —el año— y actúen sobre el mismo capital, \$1; así se establece la igualdad entre ambos valores acumulados a la tasa respectiva y durante el mismo plazo; es decir, la relación de equivalencia entre una tasa efectiva anual i y una tasa nominal i capitalizable m veces al año es:

$$\$1.00\,(1+i)^1 = \$1.00\,(1+\frac{i}{m})^m \qquad [3.8]$$

Obsérvese que para cualquier capital C se cumple la anterior igualdad; por lo tanto, la relación de equivalencia entre una tasa efectiva i anual y una tasa nominal i^m capitalizable m veces en un año es:

$$\boxed{(1+i)^1 = (1+\frac{i^m}{m})^m} \qquad [3.9]$$

Con la expresión obtenida se anualizan las tasas nominales: al reexpresarlas como tasas efectivas anuales se pueden efectuar las comparaciones.

El efecto que producen ambas tasas por separado es el mismo valor acumulado del capital al final de un año.

> La acción de la tasa i^m es en cada m-ésimo de año, hasta acumular $S = (1+\frac{i^m}{m})^m$ al final del año con la intensidad $\frac{i^m}{m}$.
> La acción de la tasa i es una vez al año, pero también logra acumular la misma cantidad, expresada como $S = (1+i)$.
> $\therefore$ Si una tasa efectiva i anual es equivalente a una tasa i^m nominal pagadera (capitalizable o convertible) m veces en el año, se cumple que el valor acumulado del capital es el *mismo* al final del *mismo* plazo cuando actúa cada una de estas tasas de interés.

Ejemplo para comparar rendimientos proporcionados por dos tasas nominales con diferentes periodos de capitalización

Ejemplo 3

¿Cuál tasa proporciona los mejores rendimientos, la de 7.02% anual capitalizable cada 28 días o la de 8.49% capitalizable cada 91 días?

Solución

Para comparar, se puede elegir cualquier periodo de referencia, en este caso se sugieren los plazos de 28 días, 91 días o el año de 360 días.

Para ejemplificar la relación de equivalencia [3.9] se emplea el plazo anual, es decir, se anualizarán las tasas nominales capitalizables m veces al año.

El número de veces que se capitalizan los intereses en cada caso es $m = \frac{360}{28}$ y $m = \frac{360}{91}$; en términos de la notación sugerida: $i^{\frac{360}{28}} = 7.02\%$, $i^{\frac{360}{91}} = 8.49\%$.

La anualización de cada tasa significa que se encontrará una tasa efectiva i anual.

$$(1 + i)^1 = \left(1 + \frac{0.0702}{\frac{360}{28}}\right)^{\frac{360}{28}} ; \; i = 0.072518$$

$$(1 + i)^1 = \left(1 + \frac{0.0849}{\frac{360}{91}}\right)^{\frac{360}{91}} ; \; i = 0.087631$$

La tasa efectiva anual i equivalente al 7.02% nominal capitalizable cada 28 días es de 7.2518%; la tasa efectiva anual i equivalente al 8.49% nominal capitalizable cada 91 días es de 8.7631%.

Como ambas tasas están referidas al mismo periodo, el año, basta elegir la mayor: ésta es la que proporciona los mayores rendimientos. La tasa que otorga mejores rendimientos es la nominal capitalizable cada 91 días.

Con este ejemplo también se observa que no siempre son mejores las tasas de interés que se capitalizan con mayor frecuencia en el año; esta conclusión sólo es cierta cuando se habla de la misma magnitud de la tasa.

Esta información sobre tasas equivalentes a menudo se arregla en un cuadro para su presentación. (Véase cuadro 3.3.)

Cuadro 3.3
Equivalencia entre tasas
efectivas anuales y tasas nominales

Tasas anuales equivalentes

Plazo	28 días	91 días	360 días
28 días	7.02		7.25
91 días		8.49	8.76

Dado que ambas tasas i e i^m son equivalentes, producirán los mismos intereses durante el mismo plazo y capital; supóngase que $10 000 se invierten durante un año a las tasas nominales proporcionadas. A continuación se comprueba que la tasa efectiva anual encontrada es equivalente a la nominal proporcionada.

Valor acumulado del capital al final de un año con tasa nominal	**Valor acumulado del capital al final de un año con tasa efectiva anual**
$S = 10000\left(1 + \frac{0.0702}{\frac{360}{28}}\right)^{\frac{360}{28}}$	$S = 10000\,(1 + 0.0725)^{1}$
$= 10725.18$	$= 10725.18$
Intereses anuales	Intereses anuales
$I = \$725.18$	$I = \$725.18$

Por lo tanto, la tasa efectiva anual de 7.25% es equivalente a una tasa de 7.02% nominal capitalizable cada 28 días, y la tasa efectiva anual de 8.75% es equivalente al 8.49% nominal capitalizable cada 91 días.

Ejemplo 4

En la figura 3.2 se muestran las tasas nominales que a diferentes rangos de capital invertido ofrecen algunos bancos en México en un instrumento de renta fija llamado Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento (PRLV).[3]

Figura 3.2

4A MERCADOS El Financiero Martes 14 de febrero de 2006

MERCADO DE DINERO

Alvaro Montero

TASA DE INTERES EN PAGARES BANCARIOS para el 14 de febrero de 2006

Rango de inversión	7 dias física	7 dias moral	28 dias física	28 dias moral	91 dias física	91 dias moral
BANAMEX — Tasas brutas en físicas y morales						
De 100 a 250 mil $	1.62	1.62	1.90	1.90	2.20	2.20
De 250 a 500 mil $	1.74	1.74	2.05	2.05	2.65	2.65
De 500 mil a 1 millón de $	1.91	1.91	2.25	2.25	2.75	2.75
Más de 1 millón de $	2.00	2.00	2.35	2.35	2.85	2.85
BBVA BANCOMER — Tasas brutas en físicas y morales						
De 100 a 250 mil $	1.10	1.10	1.10	1.10	1.20	1.20
De 250 a 500 mil $	1.10	1.10	1.14	1.14	1.30	1.30
De 500 mil a 1 millón de $	1.15	1.15	1.24	1.24	1.30	1.30
Más de 1 millón de $	1.20	1.20	1.24	1.24	1.40	1.40

Rango de inversión	7 dias física	7 dias moral	28 dias física	28 dias moral	91 dias física	91 dias moral
SANTANDER SERFIN — Tasas brutas en físicas y morales						
De 100 a 200 mil $	4.40	4.40	4.40	4.40	4.50	4.50
De 200 a 300 mil $	4.60	4.60	4.60	4.60	4.70	4.70
De 300 a 500 mil $	4.70	4.70	4.65	4.65	4.75	4.75
De 500 mil a 700 mil $	4.80	4.80	4.75	4.75	4.85	4.85
De 700 a 1 millón de $	4.80	4.80	4.80	4.80	4.90	4.90
MIFEL — Tasas brutas en físicas y morales						
De 10 a 50 mil $	5.05	5.05	5.45	5.45	6.05	6.05
De 50 a 100 mil $	5.20	5.20	5.60	5.60	6.10	6.10
De 100 a 200 mil $	5.25	5.25	5.65	5.65	6.15	6.15
Más de 200 mil $	5.30	5.30	5.80	5.80	6.30	6.30
Más de 500 mil $	6.00	6.00	6.25	6.25	6.50	6.50

[3] Este instrumento responde exactamente a la teoría vista hasta aquí: los intereses se pagan al final del periodo establecido para su pago (en este ejemplo, 7, 28 y 91 días) y se reincorporan al capital que los generó para producir nuevos intereses. El plazo de la operación es arbitrario.

Si se dispone de un capital de \$600 000 para invertir en este instrumento indistintamente en Banamex o Santander Serfin y sólo interesa obtener el más alto rendimiento, ¿cuál banco y qué tasa de interés seleccionaría?

Solución

No es necesario conocer el plazo de la operación, bastaría con seleccionar aquella tasa de interés que produce los mejores rendimientos, para lo cual se deben anualizar las tasas proporcionadas porque están referidas a tres periodos diferentes de capitalización (7, 28 y 91 días).

Debe señalarse que las tasas publicadas son brutas, es decir, aún no se les ha descontado el impuesto que el inversionista paga al fisco.

Asimismo debe considerarse que se trata de tasas nominales pagaderas (o capitalizables) *m* veces en el año; es decir, los plazos (7, 28 y 91 días) se refieren a los periodos de capitalización y no al intervalo comprendido entre el momento en que se pacta la operación y el momento en que el banco devuelve el capital y los intereses ganados, el plazo propiamente dicho.

El inversionista puede seleccionar el mejor rendimiento si compara por periodos de capitalización; de esta manera, Santander Serfin ofrece los mejores rendimientos para todos los "plazos"; sin embargo no es posible comparar entre las tasas que ofrece cada banco porque los periodos de capitalización son diferentes: se debe calcular tasas con un mismo periodo de comparación; el elegido aquí es el año, por ello se recurre a la anualización de las tasas nominales (cuadro 3.4).

Cuadro 3.4
Anualización de tasa de interés para PRLV

Equivalencia entre una tasa efectiva anual y una tasa nominal

Banco	a partir de un $i^{\frac{360}{7}}$	a partir de un $i^{\frac{360}{28}}$	a partir de un $i^{\frac{360}{91}}$
Banamex	$(1+i)=\left(1+\frac{0.0191}{\frac{360}{7}}\right)^{\frac{360}{7}}$ $i = 0.019280$	$(1+i)=\left(1+\frac{0.0225}{\frac{360}{28}}\right)^{\frac{360}{28}}$ $i = 0.022735$	$(1+i)=\left(1+\frac{0.0275}{\frac{360}{91}}\right)^{\frac{360}{91}}$ $i = 0.027784$
Santander Serfin	$(1+i)=\left(1+\frac{0.0480}{\frac{360}{7}}\right)^{\frac{360}{7}}$ $i = 0.049147$	$(1+i)=\left(1+\frac{0.0475}{\frac{360}{28}}\right)^{\frac{360}{28}}$ $i = 0.048554$	$(1+i)=\left(1+\frac{0.0485}{\frac{360}{91}}\right)^{\frac{360}{91}}$ $i = 0.049386$

El cuadro muestra que si se deseara invertir en PRLV con Banamex se debería seleccionar el "plazo" de 91 días porque paga 2.78% anual, el más alto de las tres opciones del banco. Si se invirtiera con Santander Serfin, también debería seleccionar la tasa de 4.94% anual para el "plazo" de 91 días. Con estos resultados se puede ver que no necesariamente una tasa de interés es mejor si se capitaliza con mayor frecuencia en el año.

Ejemplo para ilustrar el proceso de acumulación al final de un año a partir del nuevo capital

Ejemplo 5

Encontrar el valor acumulado de $10 000 invertidos durante un año a la tasa nominal de 7.025% pagadera (capitalizable o convertible) cada 28 días.

Solución

Si se considera que la unidad de tiempo es de 28 días, entonces la tasa efectiva i por periodo de 28 días es:

$$i = \frac{0.07025}{\frac{360}{28}}$$

Así, se puede emplear directamente la expresión [3.3] tomando en cuenta que t representa periodos de 28 días.

$$S = 10\,000\left(1 + \frac{0.07025}{\frac{360}{28}}\right)^{\frac{360}{28}} = \$10\,725$$

En el cuadro 3.5 se ilustra el proceso de acumulación a partir del nuevo capital que se encuentra en el periodo inmediato anterior, de tal manera que el factor de acumulación en cada ocasión es:

$$\left(1 + \frac{0.0702}{\frac{360}{28}}\right)$$

Cuadro 3.5
Proceso de acumulación del capital: el valor acumulado se obtiene a partir del valor acumulado en el periodo inmediato anterior

Núm. de periodo	Final del m-ésimo periodo (periodo de 28 días)	Nuevo capital C al inicio del periodo	Valor acumulado $S = C\left(1 + \frac{0.0702}{\frac{360}{28}}\right)^{1}$
1	28	10000	10055
2	56	10055	10109
3	84	10109	10165
4	112	10165	10220
5	140	10220	10276
6	168	10276	10332
7	196	10332	10389
8	224	10389	10445
9	252	10445	10502
10	280	10502	10560
11	308	10560	10617
12	336	10617	10675
12.85714	360	10675	10725*

* El valor acumulado al final del último periodo se calcula con $10675\left(1 + \frac{0.0702}{\frac{360}{28}}\right)^{0.85714}$.

En el siguiente diagrama se ubica el capital y su valor acumulado y se representan dos formas de dividir la recta de tiempo: con periodos unitarios de 28 días y con periodos unitarios de un día:

\$10000	\$10055	\$10109	\$10165	. . .	\$10725
0	28	56	84	. . .	360 días
0	*1*	*2*	*3*	. . .	$\frac{360}{28}$ = *periodos de 28 días*

En el cuadro 3.6 se muestra el valor acumulado del capital del ejemplo 4; aquí la acumulación comprende *desde* el momento cero *hasta* el momento t: no se parte del nuevo capital como en el cuadro 3.5; el resultado es el mismo que se presenta en dicho cuadro.

Cuadro 3.6
Proceso de acumulación del capital: el valor acumulado al final de *cada* periodo se sostiene a partir de la acumulación del capital *desde* el momento inicial "0"

Núm. de periodo 28 días	Valor acumulado al final del periodo $S = C\left(1 + \frac{0.0702}{\frac{360}{28}}\right)^t$
1	10055
2	10109
3	10165
4	10220
5	10276
6	10332
7	10389
8	10445
9	10502
10	10560
11	10617
12	10675
12.85714	10725

3.2.3 Valor acumulado de un capital al final de t años cuando actúa una tasa nominal capitalizable m veces al año

La expresión [3.7] se puede generalizar para cualquier capital C y para un plazo de t años. El proceso de acumulación lo puede desplegar el lector a partir del razonamiento mostrado en la figura 3.1. De esta manera, el valor acumulado de un capital C al final de t años cuando actúa una tasa nominal i^m al año es:

$$S = C\left(1 + \frac{i^m}{m}\right)^{m \cdot t} \qquad [3.10]$$

A partir de esta expresión se puede calcular el valor presente o actual C que acumuló el monto S durante t años a una tasa i^m anual capitalizable m veces al año:

$$C = S\left(1 + \frac{i^m}{m}\right)^{-m \cdot t} \quad \text{o} \quad C = \frac{S}{\left(1 + \frac{i^m}{m}\right)^{m \cdot t}}$$

Debe señalarse que [3.10] involucra el tiempo t expresado en años o fracción de año forzosamente.

Ejemplo que ilustra el uso de [3.10]

Ejemplo 6

¿Cuál es el valor acumulado de \$10 000 al final de 18 meses si se paga una tasa de interés de 7.025% nominal capitalizable cada 28 días?

Solución

Se tomará como unidad de tiempo el periodo de 28 días; el tiempo o plazo se expresa en años o fracción de año.

Empleando la expresión [3.10]

$$S = \$10\,000\left(1 + \frac{0.07025}{\frac{360}{28}}\right)^{\frac{360}{28} \cdot 1.5}$$

$$S = \$11\,108$$

Debe señalarse que la ecuación anterior puede expresarse también así:

$$S = \$10\,000\left(1 + \frac{0.07025}{\frac{360}{28}}\right)^{\frac{360}{28} \cdot \frac{540}{360}}$$

$$S = \$10000\left(1 + \frac{0.07025}{\frac{360}{28}}\right)^{\frac{540}{28}} = \$11108$$

Este resultado es exactamente el mismo que se obtendría si se hubiese empleado la expresión [3.3].

Ejemplos resueltos del capítulo

Los siguientes ejemplos se refieren al cálculo del valor presente e ilustran el uso de la expresión [3.4].

Ejemplo 7

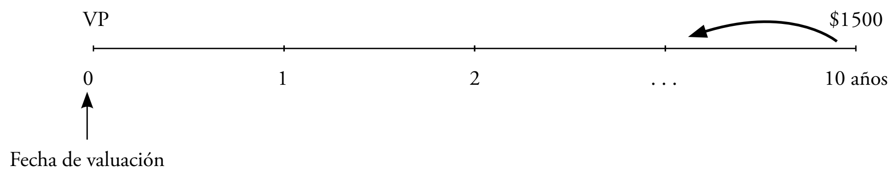
Hallar el valor presente de:

a) $1500 pagaderos en 10 años al 5% anual.
b) $2000 pagaderos en 8 ½ años al 5% anual convertible semestralmente.
c) $5000 pagaderos en 6 años al 4.8% anual convertible trimestralmente.
d) $4000 pagaderos en 5 años 5 meses al 6% anual convertible semestralmente.
e) $4000 pagaderos en 5 años 4 meses al 6% anual convertible trimestralmente.

Solución

a) $1500 pagaderos en 10 años al 5% anual.

Si la tasa es pagadera anualmente, tómese como unidad de tiempo el año.
Ambas obligaciones se sitúan en el siguiente diagrama:



Se sabe que:

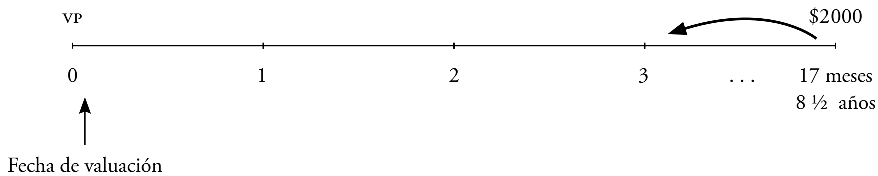
$$S = C(1 + i)^t$$

Por tanto, para encontrar el valor presente, o capital que generó el valor acumulado de $1500, se despeja éste:

$$C = S\,(1 + i)^{-t}$$
$$C = 1500\,(1 + 0.05)^{-10}$$
$$C = \$921$$

b) \$2000 pagaderos en 8 ½ años al 5% anual convertible semestralmente.

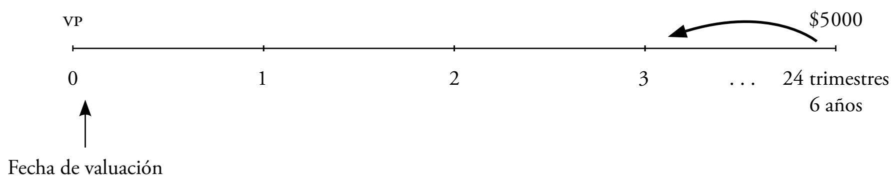
Si la tasa es pagadera semestralmente, tómese como unidad de tiempo el semestre:



$$C = S\,(1 + i)^{-t}$$
$$C = 2000\,\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{-17}$$
$$C = \$1314.39$$

c) \$5000 pagaderos en 6 años al 4% anual convertible trimestralmente.

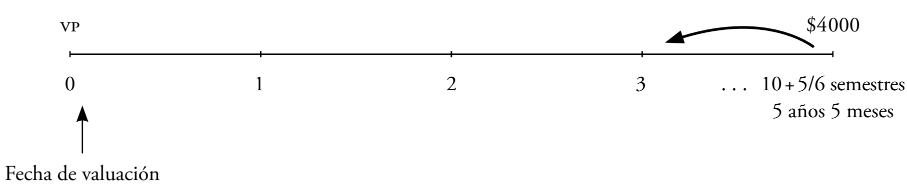
Si la tasa es pagadera trimestralmente, tómese como unidad de tiempo el trimestre:



$$C = S\,(1 + i)^{-t}$$
$$C = 5000\,\left(1 + \frac{0.048}{4}\right)^{-24}$$
$$C = \$3755$$

d) \$4000 pagaderos en 5 años 5 meses al 6% anual convertible semestralmente.

Si se toma como unidad de tiempo al semestre:



$$C = S\,(1 + i)^{-t}$$

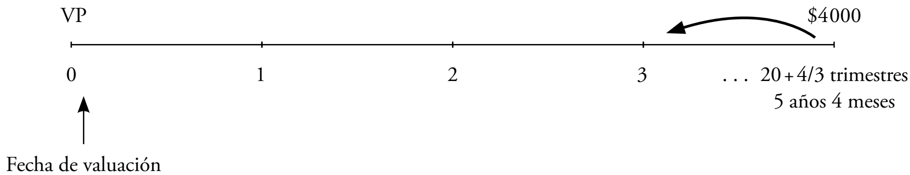
$$C = 4000\,\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{-(10+\frac{5}{6})}$$

$$C = 4000\,\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{-10.8333}$$

$$C = \$2903.95$$

e) \$4000 pagaderos en 5 años 4 meses al 6% anual convertible trimestralmente.

Si se toma como unidad de tiempo el trimestre.



$$C = S\,(1 + i)^{-t}$$

$$C = 4000\,\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{-(20+\frac{4}{3})}$$

$$C = \$2911$$

> **Conclusión:**
> Con estos ejemplos se pretende que el lector observe que la expresión [3.1] debe ser consistente en lo que se refiere a los periodos de capitalización de la tasa de interés y al plazo; si la unidad de tiempo corresponde al periodo de capitalización, el plazo siempre debe expresarse en esas unidades de tiempo.

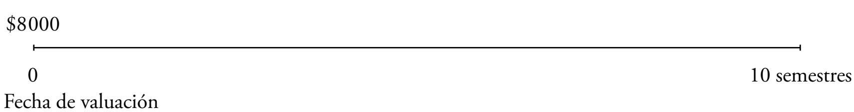
Ejemplo 8

Si una persona puede liquidar una deuda, ya sea mediante un pago único de \$8000 de inmediato o de \$10000 dentro de 5 años, ¿qué opción debe aceptar suponiendo que debe pagar una tasa de interés de 5% convertible semestralmente?

Solución

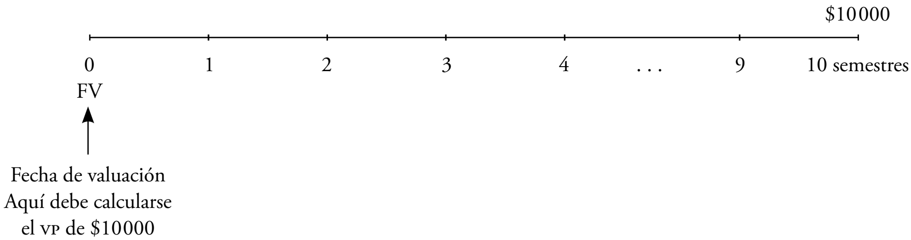
El deudor debe comparar ambas obligaciones. Debe seleccionar una fecha para valuarlas. Se facilita el cálculo si se elige el momento presente.

Primera opción:



Para valuar la primera opción, no se necesita hacer ningún cálculo: la cantidad de \$8000 tiene precisamente ese valor por estar ubicada en la fecha de valuación.

Segunda opción:



El valor presente (VP) del pago único dentro de 5 años calculado al 5% anual convertible semestralmente (la unidad de tiempo es el semestre) es:

$$VP = 10000\left(1 + \frac{0.05}{\frac{360}{180}}\right)^{-10}$$

$$VP = \$7811.68$$

Como ambas opciones se han evaluado en la misma fecha, en el momento presente el deudor pagaría de inmediato \$8000 con la primera opción, mientras que con la segunda, también calculada en el momento presente como ya dijimos, pagaría el equivalente a \$7811.68; por lo tanto, el deudor debe elegir la segunda opción de pago, es decir, liquidar la deuda dentro de 5 años con un desembolso de \$10000.

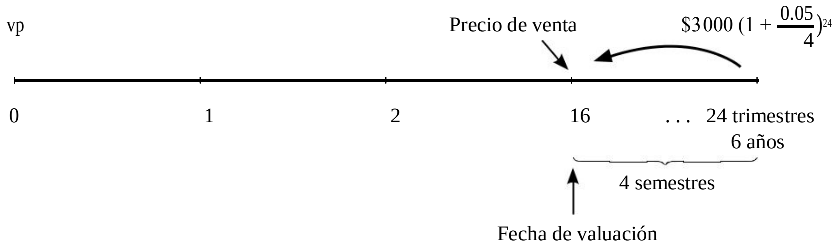
Ejemplo 9

La compañía F firma un documento que la compromete a pagar a la empresa N \$3000 en 6 años con intereses a 5% convertible trimestralmente. Cuatro años después, esta última empresa vende el documento al banco MX: ¿cuánto pagó este banco por el documento si la tasa de interés que fijó en la operación era de 4% convertible semestralmente?

Solución

Aquí es posible identificar dos unidades de tiempo:

La unidad de tiempo para encontrar el valor acumulado del documento al final de 6 años es el trimestre; la unidad de tiempo para el valor acumulado del documento al final de los 4 años, es decir, cuando se adelanta la fecha de vencimiento dos años, es el semestre.



El valor del documento al final de los 6 años es: S = \$4042.05.

El precio de venta de la empresa N al banco mx se refiere al capital cuya expresión es $C = S(1 + i)^{-t}$, el plazo t se refiere a los 2 años que se adelanta la fecha de vencimiento:

$$Precio\ de\ venta = 4042\left(1+\frac{0.04}{2}\right)^{-4}$$

C = \$3734.22, cantidad que recibe la empresa N del banco mx

Por lo tanto, el banco mx debe pagar a la empresa N por el documento la cantidad de \$3734.22 cuatro años después de que la compañía F firmó el documento.

El banco mx se esperará dos años para recibir \$4042.05 por parte de la empresa F, es decir, habrá ganado en la operación \$307.82.

3.2.4 Relación de equivalencia entre dos tasas nominales

Si se deseara obtener la equivalencia entre dos tasas nominales, se podría seguir el mismo razonamiento empleado para llegar a la expresión [3.9] tomando en cuenta que dos tasas son equivalentes si producen el mismo valor acumulado a partir del mismo capital y durante el mismo plazo:

Si i^{m_1} es una tasa nominal capitalizable m_1 veces al año.

Si i^{m_2} es una tasa nominal capitalizable m_2 veces al año.

Y si se considera como capital a la unidad monetaria \$1 (por simplicidad), se tiene

$$\left(1+\frac{i^{m_1}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1+\frac{i^{m_2}}{m_2}\right)^{m_2}$$

Equivalencia entre dos tasas nominales

Ejemplo 10

A partir de la tasa de 7.025% nominal capitalizable cada 28 días, calcúlese una tasa de interés equivalente nominal pagadera cada 91 días.

Solución

Se empleará la expresión [3.11] para calcular la equivalencia entre dos tasas nominales.

$$\left(1+\frac{0.07025}{\frac{360}{28}}\right)^{\frac{360}{28}}=\left(1+\frac{i^{\frac{360}{91}}}{\frac{360}{91}}\right)^{\frac{360}{91}}$$

$$i^{\frac{360}{91}}=0.0706828$$

Tasa anual capitalizable cada 91 días que equivale a una tasa de 7.025% anual capitalizable cada 28 días

En el cuadro 3.7 se resume la equivalencia entre estas dos tasas nominales y las ta-sas de interés del cuadro 3.3 del ejemplo 3.

Esta información puede completar el cuadro 3.3 de la siguiente manera:

Cuadro 3.7
Equivalencia entre tasas nominales
con diferentes periodos de capitalización

Tasas nominales

Periodo de capitalización	28 días	91 días	360 días
28 días	7.02	7.07	7.25
91 días		8.49	8.76
360 días			

El lector debe calcular e interpretar las casillas vacías del cuadro anterior.

Ejemplo 11

Responder a la pregunta del ejemplo 5 empleando la tasa de 7.06828% capitalizable cada 91 días que equivale al 7.025% anual pagadero cada 28 días.

Solución

Como ambas tasas son equivalentes, deben producir los mismos intereses, es decir, el valor acumulado debe ser el mismo (\$10725).

$$S = \$10000\left(1 + \frac{0.0706828}{\frac{360}{91}}\right)^{\frac{360}{91}} = \$10725$$

Con lo cual se demuestra que $i^{\frac{360}{91}} \sim i^{\frac{360}{28}}$.

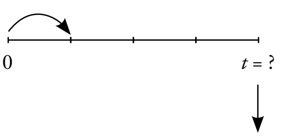
Ejemplo 12

Determinar durante cuánto tiempo se deberá invertir un capital de \$100 al 18% anual convertible mensualmente para obtener el doble del valor acumulado de otro capital de \$100 depositado durante el mismo tiempo al 10% anual capitalizable semestralmente.

Solución

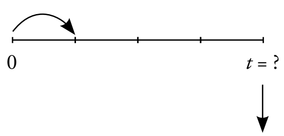
Es conveniente ubicar las obligaciones para la primera y segunda inversión respectivamente.

El primer capital se invierte al 18% anual convertible mensualmente a un cierto tiempo t



$$S = 100\left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12 \cdot t}$$

El segundo capital se invierte al 10% anual convertible semestralmente durante el mismo tiempo t del primer capital



$$S = 100\left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{2 \cdot t}$$

Se sugiere emplear la expresión [3.10] para el valor acumulado del capital.

Como el valor acumulado del primer capital debe ser el doble del valor acumulado del segundo capital:

$$100\left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12 \cdot t} = 2\left[100\left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{2 \cdot t}\right]$$

$$\frac{100}{200} = \frac{\left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{2 \cdot t}}{\left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12 \cdot t}}$$

$$\frac{1}{2} = \left[\frac{(1 + 0.05)^2}{\left(1 + 0.09\right)^{12}}\right]^t$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1.1025}{1.195618171}\right)^t$$

$$\frac{1}{2} = (0.922117133)^t$$

$$t = \frac{\log 0.5}{\log 0.922117133}$$

$$t = 8.5486 \text{ años}$$

Es el tiempo que se necesita invertir el primer capital para obtener el doble del monto del segundo capital

Comprobación

El valor acumulado del segundo capital es:

$$S = 100\left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{2(8.5486)}$$

$$S = \$230.29$$

El valor acumulado del primer capital es:

$$S = 100\left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12(8.5486)}$$

$$S = \$460.58$$

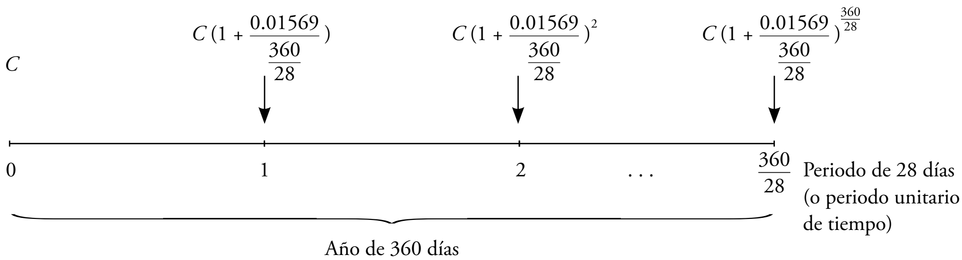
Que representa el doble del valor acumulado del segundo capital durante el mismo plazo.

3.3 Relación entre el modelo de capitalización y el modelo de interés simple: ¿cuál produce mejores rendimientos?

Si el objetivo del inversionista es obtener el máximo rendimiento, parecería lógico seleccionar el modelo de capitalización, sin embargo no siempre esta decisión es la mejor, pues la longitud del periodo de capitalización de la tasa de interés influye en la acumulación (o en el descuento). Para ilustrar lo anterior, supóngase que por una inversión de \$100000 se paga una tasa de Cetes de 15.69% capitalizable cada 28 días, ¿qué plazo es conveniente para obtener los mayores rendimientos: 7, 14, 28, 91, 182 o 364 días?

Para decidir se calculará el valor acumulado de la inversión para cada uno de esos plazos para los dos modelos de interés.

Es conveniente señalar que la tasa de Cetes, de 15.69% capitalizable cada 28 días, indica que en un año hay $\frac{360}{28}$ veces en que se reincorporan los intereses al capital que los originó para producir nuevos intereses.



La tasa de interés que se gana en cada periodo unitario de tiempo[4] es:

$$\frac{0.1569}{\frac{360}{28}} = 0.012203$$

también llamada tasa efectiva por periodo de 28 días.

En el cuadro 3.8 se muestran los cálculos (a) y el valor acumulado de la inversión (b)

Obsérvese que el valor acumulado S en el modelo compuesto también se puede expresar como:

$$S = 100000\left[1 + \frac{0.1569}{\frac{360}{28}}\right]^{\frac{360}{28}\cdot t}$$

Recordando que t se indica en años o fracción de año; por ejemplo, para 91 días quedaría:

$$S = 100000\left[1 + \frac{0.1569}{\frac{360}{28}}\right]^{\frac{360}{28}\cdot\frac{91}{360}}$$

[4] Si una tasa de interés es pagadera cada 28 días, por ejemplo, ésa sería la unidad de tiempo: 1 significa 28 días.

Cuadro 3.8
Valor acumulado del capital en los modelos de interés simple e interés compuesto

Valor acumulado de un capital de $100000

Plazo Días	Interés simple $S = C(1 + it)$	Interés compuesto $S = C(1 + i)^t$
	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{360}(t)\right]$	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{\frac{360}{28}}\right]^{\frac{t}{28}}$
7	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{360}(7)\right]$	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{\frac{360}{28}}\right]^{\frac{7}{28}}$
14	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{360}(14)\right]$	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{\frac{360}{28}}\right]^{\frac{14}{28}}$
28	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{360}(28)\right]$	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{\frac{360}{28}}\right]^{\frac{28}{28}}$
91	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{360}(91)\right]$	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{\frac{360}{28}}\right]^{\frac{91}{28}}$
182	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{360}(182)\right]$	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{\frac{360}{28}}\right]^{\frac{182}{28}}$
364	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{360}(360)\right]$	$S = C\left[1 + \frac{0.1569}{\frac{360}{28}}\right]^{\frac{364}{28}}$

a)

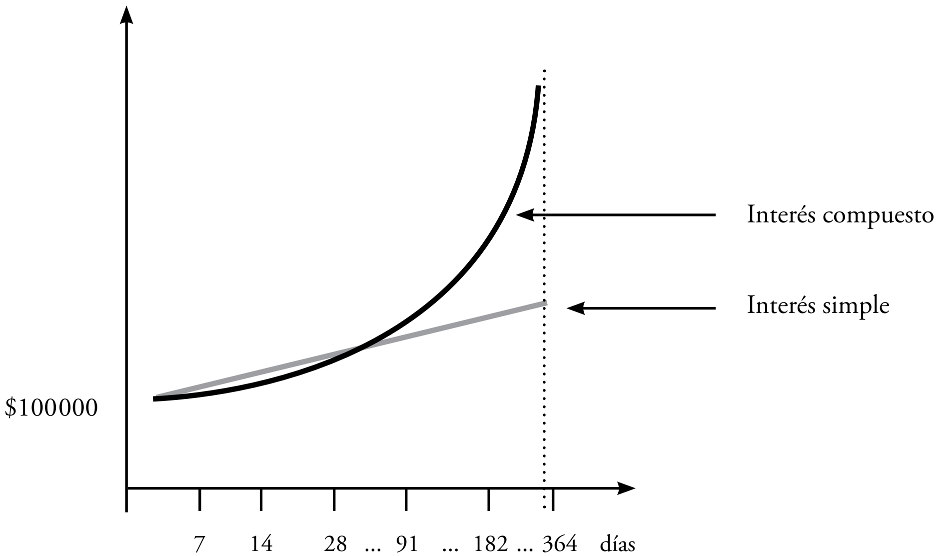
Valor acumulado de un capital de $100000

Plazo Días	Interés simple $S = C(1 + it)$	Interés compuesto $S = C(1 + i)^t$
7	100305	100304
14	100610	100608
28	101220	101220
91	103966	104021
182	107932	108203
364	115864	117079

b)

Se pueden apreciar mejor las diferencias encontradas si se grafica la información anterior:

Gráfica 3.1
Interés compuesto contra interés simple con plazos diferentes al periodo de capitalización de la tasa de interés



En la gráfica 3.1 se observa que si el inversionista elige el plazo inferior a 28 días, el periodo de capitalización para Cetes al 15.69%, el modelo de interés simple le produce mejores rendimientos que el modelo compuesto; si eligiera un plazo de 28 días —que coincide con el periodo de capitalización de los intereses—, ambos modelos le producirían idénticos rendimientos; finalmente, si seleccionara plazos superiores a 28 días, el modelo de interés compuesto sería el más conveniente.

De lo anterior se concluye que:

> No siempre es mejor el modelo de capitalización que el modelo simple.
>
> Los mejores rendimientos se obtienen si se seleccionan plazos mayores al periodo de capitalización de la tasa de interés pagada.
>
> Si el plazo de la inversión coincide con el periodo de capitalización de los intereses, ambos modelos producen los mismos rendimientos.

Si se generaliza lo anterior y se considera que el periodo de capitalización de los intereses corresponde a la unidad de tiempo, se tienen las siguientes relaciones:

a) Si $t < 1 \Rightarrow (1 + it) > (1 + i)^t$

b) Si $t = 1 \Rightarrow (1 + it) = (1 + i)^t$

c) Si $t > 1 \Rightarrow (1 + it) < (1 + i)^t$

Las relaciones entre plazo y periodo de capitalización de la tasa de interés se resumen de la siguiente manera:

a) Cuando el plazo de la inversión es *inferior* al periodo de capitalización, el modelo de interés simple produce mayores rendimientos que el modelo de interés compuesto.
b) Cuando el plazo de la inversión *coincide* con el periodo de capitalización, el modelo de interés simple produce los mismos rendimientos que el modelo de interés compuesto.
c) Cuando el plazo de la inversión es *mayor* al periodo de capitalización, el modelo de interés compuesto produce mayores rendimientos que el modelo de interés simple.

Ejercicios propuestos

Interés compuesto

1. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital si la tasa de interés es de 35% y se compone: a) trimestralmente, b) semestralmente, c) anualmente?
   Sol.: a) 8.26 trimestres, b) 4.29 semestres, c) 2.31 años.
2. Si una inversión a 15 meses duplica su valor y actúa con una determinada tasa fija, ¿en cuánto tiempo lo triplicará a la misma tasa?
   Sol.: 23.77 meses.
3. Las ventas al menudeo se han incrementado a razón de 5% anual. Si las ventas fueron de $200000 en el año, ¿cuáles son las ventas estimadas para dentro de dos años si se mantiene el ritmo de crecimiento?
   Sol.: $ 220500.
4. Una empresa deposita $10000 en una cuenta de ahorros que paga a 13% anual convertible semestralmente, ¿cuál será el monto de la inversión después de 24 meses? Calcular por el método aproximado.
   Sol.: $12864.66.
5. Se descuenta un pagaré con valor de $150000 en 90 días. El banco carga una tasa de 15% de interés capitalizable mensualmente. Determinar el capital utilizando el método aproximado u ordinario.
   Sol.: $149, 534.88.
6. ¿Cuál es el monto después de un año si $2000 se invierten al 8% convertible:
   a) mensualmente, b) trimestralmente, c) semestralmente, d) anualmente?
   Sol.: a) $2,165.99, b) $2,164.86, c) $2,163.20, d) $2,160.
7. Por un préstamo de $10000 se pagaron intereses de $750; el plazo del préstamo fue de mes y medio; encontrar: a) la tasa anual pagadera mensualmente, b) la tasa anual pagadera semestralmente.
   Sol.: a) 59.27%, b) 67.09%.
8. ¿Cuál será el valor acumulado de $600 al final de 15 años si la tasa de interés es variable: se paga 7% capitalizable trimestralmente durante los primeros 5 años, y 8% capitalizable trimestralmente durante el tiempo restante?
   Sol.: $1, 874.33
9. Encontrar el valor presente de $10000 pesos con vencimiento al final de 3 años si el dinero se evalúa a: a) 3% convertible mensualmente, b) 5.5% convertible trimestralmente.
   Sol.: a) $9140.33, b) $8488.47.
10. Una persona pagó una deuda con vencimiento a 7 meses con $17500 pesos. La tasa de interés que se cobró fue a 10 1/4% convertible cada 28 días, ¿cuál fue el capital prestado?
    Sol.: $16, 488.22.

11. ¿Cuál es el monto que se generará con un capital de $ 6,500 en tres años a 5.5% convertible trismestralmente?
    Sol.: $7, 657.44.
12. Un capital de $800 se invierte a una tasa de 10% anual capitalizable trimestral-mente durante los primeros 2 años y de 12% anual capitalizable semestralmente durante los siguientes 3 años. Encontrar el valor acumulado de la inversión al final del quinto año.
    Sol.: $1382.66.
13. ¿Qué tasa nominal capitalizable trimestralmente es equivalente al 7% convertible semestralmente?
    Sol.: 6.9397% anual convertible trimestralmente.
14. Verifique que ambas tasas de interés del ejercicio anterior sean equivalentes: ¿cuál es el valor acumulado de un capital de $10000 pesos invertido durante 7 meses? Emplee cada una de las dos tasas para llegar al mismo resultado.
    Sol.: $10, 409.51 para ambos casos.
15. ¿Durante cuánto tiempo se invirtió un capital de $50000 pesos hasta alcanzar un monto de $52, 300 pesos al 12% anual convertible bimestralmente?
    Sol.: 136 días aproximadamente.
16. En el año 2000, la producción de automóviles fue de 200, 000 unidades; ¿cuál es la producción en 2010, si crece 10% anual en los primeros 2 años, 12% en los siguientes 5 años y 8% anual en los últimos?
    Sol.: 537, 250 unidades.
17. Para verificar que los rendimientos obtenidos bajo el modelo de interés compuesto no siempre son mejores que los obtenidos con el interés simple, calcular el interés bajo ambos modelos para una inversión de $50000 colocados al 8.6% anual pagadero cada 91 días y un plazo de: a) 60 días, b) 91 días, c) 120 días.
    Sol.: a) $716.67 y $714.04, b) $1,086.94 y $1,086.94, c) $1,433.33 y $1,438.27
18. Las utilidades de cierta empresa se han incrementado al 5% anual. Si las utilidades para el año 2006 fueron de 5 millones, ¿cuáles serán las utilidades estimadas para los próximos dos años?
    Sol.: 5.250 millones para el 2007 y 5.512 millones para el 2008.
19. El precio de contado en dólares americanos de un auto es de 50000; si se financia mediante 2 pagos, el primero inmediato por 14000 dólares americanos y el segundo tres meses después por 45000 dólares americanos, ¿cuál es la tasa de interés nominal capitalizable mensualmente que se cobra por el financiamiento?
    Sol.: 92.660814%.

20. ¿Cuál de los siguientes bancos paga los mejores rendimientos? Anualice las tasas.

Banco	Plazo	Tasa anual
Bancomer	28 días	6.5%
Ixe	91 días	8.0%
Santander	7 días	7.25%

Sol.: Ixe paga los rendimientos más altos con 8.242%, contra Bancomer 6.698% y Santander 7.5138% (tasas anualizadas).

21. ¿Cuál es la tasa nominal anual capitalizable quincenal equivalente a una tasa de 25% nominal anual capitalizable mensualmente?
Sol.: 24.8711%.
22. Se invierten $20, 000 en una cuenta que paga el 20% nominal anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es la tasa efectiva que se paga en tres meses?
Sol.: 5.083%.
23. El 23 de diciembre de 2006 se realizó un préstamo, el cual se acordó liquidar mediante dos pagos de $ 35, 000. Cada uno a efectuarse el 3 y el 15 de mayo del siguiente año; la tasa de interés cobrada fue de 17% capitalizable diariamente. Determine: a) ¿cuál fue el capital prestado?, b) ¿cuánto se pagó por concepto de interés? Use la regla ordinaria.
Sol.: a) $65, 647.02, b) $4, 352.98.
24. Encontrar la tasa anualizada equivalente a una tasa nominal convertible cada 175 días de 8.13%.
Sol.: 8.2999%.
25. Una suma de $10000 se invierte el 20 de octubre y se retira el 21 de noviembre del mismo año, ganando un interés de $250. Encuentre la tasa de interés anual pagada: a) mediante la regla exacta, b) mediante la regla ordinaria.
Sol.: a) 32.53%, b) 33.2095%.
26. De las siguientes tasas: a) 8% anual convertible trimestralmente, y b) 9.5% anual capitalizable cada 182 días, ¿qué tasa paga los mejores rendimientos?
Sol.: el 9.5% anual capitalizable cada 182 días paga el mejor rendimiento con 1.097230, a diferencia de la tasa de 8% que sólo genera 1.08243.

Fórmulas financieras

Conviene recordar

1. Debe distinguirse la cantidad sobre la que se calcula una tasa y el momento en el que se paga: la tasa de interés se calcula sobre el capital o valor presente y se paga al final del periodo preestablecido; la de descuento se calcula sobre un valor futuro y se paga al inicio del periodo preestablecido.

2. La *unidad de tiempo* se refiere al periodo de pago de la tasa (de interés o descuento).

3. Una tasa nominal de interés no es propiamente una tasa anual de interés porque sólo toma como referencia al año para expresar a la tasa efectiva por período.

4. La *anualización* de tasas se refiere a expresar la equivalencia de una tasa nominal capitalizable *m* veces al año con una tasa efectiva anual.

5. La equivalencia de tasas puede ser entre dos tasas nominales o entre una efectiva anual y una nominal.

6. Si una tasa efectiva anual *i* es equivalente a una nominal i^m pagadera *m* veces al año, la efectiva es mayor que la nominal.

7. Las tasas efectivas *i* no necesariamente son anuales; pueden ser efectivas diarias, semanales, mensuales, trimestrales, entre otras periodicidades.

Básica
Valor acumulado,
valor futuro o monto

$$S = \underbrace{C(1+i)^t}_{\text{Factor de acumulación en el interés compuesto con tasa efectiva de interés}}$$

Capital o valor presente

$$C = S(1+i)^{-t}$$

Tasa efectiva

$$i = \left[\frac{S}{C}\right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

Tiempo o plazo

$$t = \frac{\log\left[\frac{S}{C}\right]}{\log(1+i)}$$

Básica
Valor acumulado,
Valor futuro o monto

$$S = \underbrace{C\left(1+\frac{i^m}{m}\right)^{mt}}_{\text{Factor de acumulación en el interés compuesto con tasa nominal de interés}}$$

Capital o valor presente

$$C = S\left(1+\frac{i^m}{m}\right)^{-mt}$$

Nota: se sugiere recordar sólo las expresiones de los recuadros blancos; son básicas porque las variables se obtienen mediante sencillos pasos algebraicos.

Fórmulas financieras

Tasa nominal capitalizable
m veces al año

$$i^m = \left[\left(\frac{S}{C} \right)^{\frac{1}{mt}} - 1 \right](m)$$

Tiempo o plazo

$$t = \frac{\log \left[\frac{S}{C} \right]}{\log \left(1 + \frac{i^m}{m}\right)} \left(\frac{1}{m} \right)$$

Básica: equivalencia anual

$$(1 + i)^1 = \left(1 + \frac{i^m}{m}\right)^m$$

Tasa efectiva

$$i = \left(1 + \frac{i^m}{m}\right)^m - 1$$

Tasa nominal capitalizable
m veces al año

$$i^m = \left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right](m)$$

Nota muy importante:

$i = \frac{i^m}{m}$ = tasa efectiva por
m-ésimo o
por periodo.
Aquí *i* no es efectiva
anual.

Capítulo 4
Ecuación de valor

Introducción

En la práctica no es común que las transacciones financieras se pacten con sólo dos desembolsos: uno al inicio de la operación y otro al final del plazo convenido. Generalmente los préstamos se liquidan mediante más de un pago parcial o bien la inversión se incrementa con más de un depósito. Las operaciones con series de pagos que se traten a partir de este capítulo, generalizan los modelos de acumulación y descuento vistos hasta este momento.

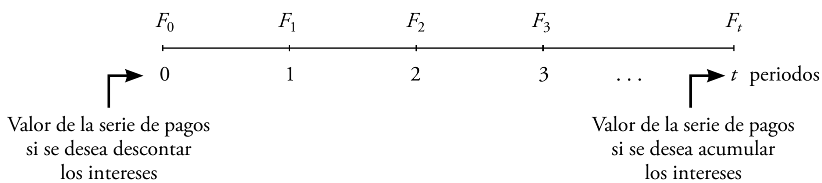
El objetivo de este capítulo es dominar la formulación de la ecuación de tiempo y valor para reestructurar deudas o crear fondos de ahorro a partir de series de obligaciones con más de dos flujos de efectivo.

A partir de aquí se empleará la palabra *pago* o *renta* para denotar los desembolsos de efectivo para disminuir una deuda o aumentar una inversión. Las tasas de interés y de descuento empleadas serán efectivas por periodo de pago de la renta a menos que se indique claramente de otra forma.

4.1 Operaciones con más de dos flujos de efectivo

Supóngase que se realizan t pagos al final de cada periodo a una tasa de interés i efectiva por periodo, ¿cuál será el valor acumulado de esta serie de pagos?, ¿cuál es el valor actual de la serie de pagos? Estas son dos preguntas frecuentes, aunque no las únicas, cuando se habla de series de pagos.

Esta operación se ilustra en el siguiente diagrama de tiempo:



Para conocer el valor de toda la serie de pagos en cualquiera de las dos fechas propuestas se debe considerar que de acuerdo con las suposiciones fundamentales de la teoría del interés (sección 1.1, capítulo 1), el dinero siempre debe producir más dinero; de ahí que aunque los pagos fuesen de la misma magnitud, al referirlos a cualquier fecha deberán considerárseles, respectivamente, los intereses. También debe considerarse, para calcular el valor de toda la serie de pagos, que en toda transacción financiera, la obligación de las partes involucradas (la que es dueña de los recursos y la que los pide prestados) debe ser igual en el tiempo; en otras palabras, en toda transacción rige un principio de equitatividad.

En la explicación siguiente se ha seleccionado el final del periodo t para evaluar a la serie de pagos F_t, es decir, se calculará el valor acumulado de la serie.

A y B son las obligaciones de las partes involucradas en la operación (en nuestro ejemplo, A se refiere a los depósitos y B al valor acumulado de la serie de depósitos). El principio de equitatividad significa que el valor de la obligación A en una cierta fecha debe ser igual a la obligación B al ser evaluadas en la *misma fecha* y con *una misma tasa de interés*:

Principio de equitatividad en una transacción financiera

Obligación A		**Obligación B**	
(valuada a una cierta fecha y a una cierta tasa de interés)	=	(valuada a una misma fecha y con la misma tasa de interés)	[4.1]

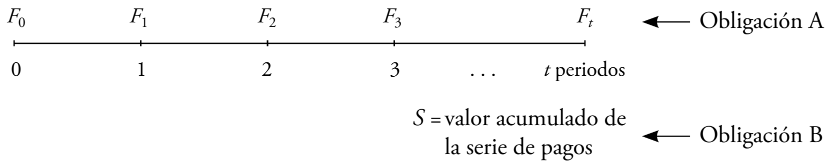
Esta ecuación indica que todos los flujos deben contener los intereses a pagar durante el tiempo que los posea el prestatario y que, por supuesto, actúa una misma tasa de interés para calcular ambas obligaciones A y B.

Al establecer una igualdad entre las obligaciones A y B, referirlas ambas a una misma fecha de valuación (FV)[1] y calcularlas a una misma tasa de interés, se obtiene una *ecuación de tiempo y valor* o simplemente una *ecuación de valor*.

> A una cierta tasa de interés, el valor de los pagos realizados en cierta fecha debe ser igual, en esa misma fecha, al valor de los pagos que se reciben.
> A la fecha seleccionada para comparar las obligaciones se le llama *fecha de valuación* o *fecha focal*.

[1] A esta fecha también se le conoce como *fecha focal*; en adelante se abreviará como FV cuando se le ubique en los diagramas de tiempo y valor.

El diagrama de tiempo muestra las dos series de obligaciones, aunque la cantidad S sólo represente una obligación de un pago.



Todos los flujos F_j (j = 1, 2, ..., t) deberán contener los intereses correspondientes al tiempo que hay entre el momento de su pago y la fecha de valuación seleccionada.[2]

Ejemplos con flujos de efectivo efectuados durante más de una ocasión

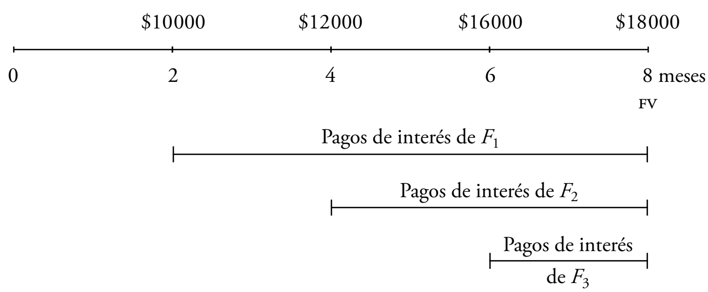
Ejemplo 1

Se realizan 4 pagos de \$10000, \$12000, \$16000 y \$18000 al final de cada bimestre. La tasa de interés que se paga es de 10% simple anual, ¿cuál es el valor acumulado de la serie de pagos?

Solución

El modelo de interés simple $S = C(1 + it)$ ahora se extiende para más de dos pagos; se considera a S y C como pagos o rentas. Lo mismo ocurre con el valor presente o capital $C = S(1 + it)^{-1}$.

Se debe seleccionar una fecha de valuación; aquí la fecha no puede ser otra que el final del cuarto bimestre:



[2] El subíndice se introdujo sólo para indicar el momento en que se realiza cada uno de los pagos F (que pueden ser o no iguales y no necesariamente todos son diferentes de cero).

El flujo F_j ya contiene, además del capital, los intereses respectivos.

Obsérvese que el flujo F_4 no genera interés porque está ubicado en la fecha de valuación.

El principio de equitatividad es:

Valor acumulado de la serie de pagos al final del cuarto bimestre a la tasa de 10% simple anual.	=	Un pago único, S, al final del cuarto bimestre a la tasa de 10% simple anual.

Si se respeta este principio y la unidad de tiempo es el año, la ecuación de tiempo y valor es:

$$10{,}000\left(\underbrace{\left(1+0.10\left(\tfrac{6}{12}\right)\right)}\right)+12{,}000\left(\underbrace{\left(1+0.10\left(\tfrac{4}{12}\right)\right)}\right)+16{,}000\left(\underbrace{\left(1+0.10\left(\tfrac{2}{12}\right)\right)}\right)+18{,}000 = S$$

Valor acumulado (monto) o valor futuro

No hay pago de interés porque este pago está en la fecha de valuación.

S= $57, 166,70

El ejemplo 1 se puede interpretar como si fuese una deuda o serie de tres deudas a pagar en la fecha indicada que se deseara sustituir por un pago único al final del octavo mes (o cuarto bimestre); en tal caso se sobreentiende que cada uno de los pagos propuestos ya contienen intereses, pero como se sustituyen por otro pago en otra fecha, se consideran los nuevos intereses generados a la nueva fecha en que se cancela la deuda.

Obsérvese que si se ve cada pago por separado, la anterior ecuación es la aplicación del modelo de interés simple propuesto para dos pagos.

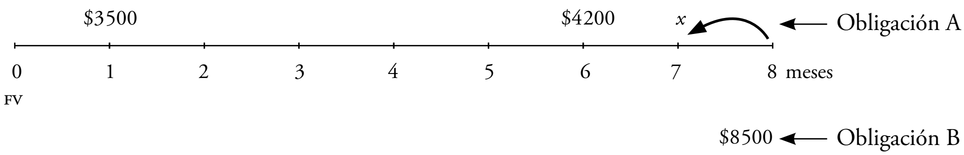
Ejemplo 2

Se desea acumular una inversión al final de 8 meses mediante los siguientes depósitos: $3,500 dentro de un mes; $4,200.5 meses después del primer depósito, y una cantidad desconocida un mes después del último depósito, de tal manera que se acumulen $8,500 a la tasa de interés de 7.74% simple anual, ¿cuál es el importe del pago que permitirá cumplir el objetivo?

Solución

Si la fecha de valuación[3] acordada por las partes es el momento presente, la ubicación de las obligaciones en el tiempo es como se muestra a continuación:

3 En este documento se acostumbrará, para efecto de valuación y con fines didácticos, empezar por los pagos más cercanos a la fecha de valuación, siempre iniciando de izquierda a derecha.



Para valuar el importe del depósito desconocido se recurre al principio de equitatividad:

Serie de los 3 pagos de $3500, $4200 y *x* valuados en el momento presente a la tasa de 7.74% simple	=	Valor de $8500 valuados en el momento presente a la tasa de 7.74% simple anual

[4.3]

$$8500\left[1+\frac{0.0774}{360}(240)\right]^{-1} = 3500\left[1+\frac{0.0774}{360}(30)\right]^{-1} + 4200\left[1+\frac{0.0774}{360}(180)\right]^{-1} + x\left[1+\frac{0.0774}{360}(210)\right]^{-1}$$

$$8082.921263 = 3477.569676 + 4043.515933 + x(0.956800459)$$

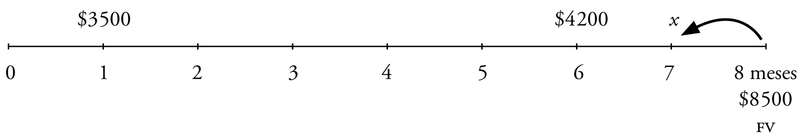
$x = \$587$ Importe del tercer pago con el que la serie de tres rentas acumulará $8500 dentro de 8 meses

En este ejemplo se observa que, al contrario de lo que se esperaría, el pago desconocido no puede ser $800 calculado al establecer una ecuación tal y como se haría en una curso de matemáticas ($8500 = 3500 + 4200 + x$) porque no se consideraría ni el tiempo en que deben efectuarse los pagos ni la tasa de interés. La ecuación de tiempo y valor planteado considera que el dinero siempre produce más dinero en el tiempo, esto se logra al respetar el principio de equitatividad en las obligaciones.

Con el siguiente ejemplo se ilustra una conclusión importante del modelo de interés simple; al cambiar la fecha de valuación, *cambia* el valor de la obligación.

Ejemplo 3

Encontrar el valor del tercer depósito del ejercicio anterior si se toma como fecha de valuación el octavo mes.



Como el principio de equitatividad [4.1] debe respetarse, sólo se debe considerar el cambio de la fecha de comparación; [4.3] se expresaría como:

Serie de los 3 pagos de \$3500, \$4200 y x valuados en el octavo mes a la tasa de 7.74% simple anual	=	Valor de \$8500 valuados en el octavo mes a la tasa de 7.74% simple anual

$$8500 = x\left[1 + \frac{0.0774}{360}(30)\right] + 4200\left[1 + \frac{0.0774}{360}(60)\right] + 3500\left[1 + \frac{0.0774}{360}(210)\right]$$

$\therefore\ x = \$584$ Importe del último depósito (o pago).

De los ejemplos 2 y 3 se observa que:

> Al comparar obligaciones en el tiempo con el modelo de interés simple, el valor de las obligaciones *cambia* si se cambia la fecha de valuación. [4.4]

Ejemplo 4

Una compañía pide a un banco \$10000 con una tasa de interés compuesto de 9% anual. Si se realizarán cinco pagos anuales iguales empezando al final del primer año, ¿cuál es el importe de cada pago anual? Considérese que hay reinversión de intereses.

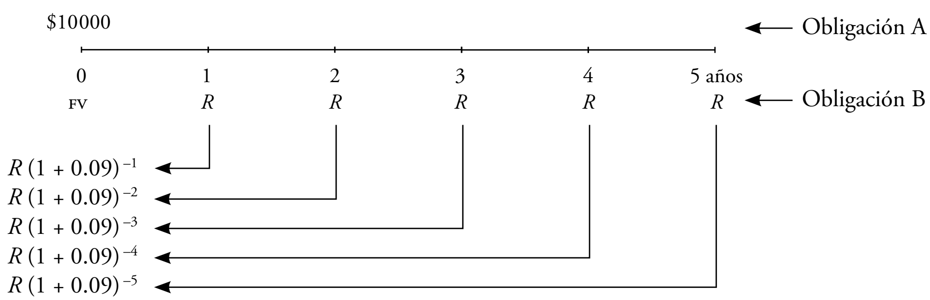
Solución

Se considerará como fecha de valuación el momento presente (esta selección es arbitraria); la unidad de tiempo es el año.

Si R es el importe del pago anual, éste ya incluye una parte del capital acumulado y una parte de intereses; para encontrar su importe se establece una ecuación de valor en la que el principio de equitatividad es:

Valor de \$10000 en el momento presente al 9% anual	=	Valor de las cinco rentas R en el momento presente al 9% anual

El diagrama muestra la ubicación de las obligaciones en el tiempo; al final de cada flecha se muestra el valor presente de cada renta R:



Obsérvese que aunque cada pago R ya contiene parte de los intereses adeudados, al referirlos a la fecha seleccionada de comparación se deben descontar, en este ejemplo, los intereses. De esta manera la ecuación de valor es:

$$10000 = R\,[(1 + 0.09)^{-1} + (1 + 0.09)^{-2} + (1 + 0.09)^{-3} + (1 + 0.09)^{-4} + (1 + 0.09)^{-5}]$$

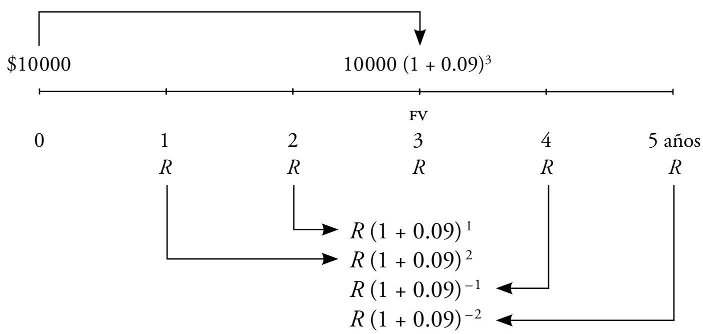
$\therefore\ R = \$2571.00$ Importe de cada uno de los cinco pagos anuales que cancelan una deuda de \$10000 al 9% anual

Ejemplo 5

Resolver el ejemplo 4 si se cambia la fecha de valuación al final del tercer año.

Solución

Todos los flujos deberán referirse (acumularse o decontarse según el caso) al tercer año.



El principio de equitatividad no cambia; los intereses de los pagos R que están a la izquierda de la fecha de valuación generan intereses; asimismo, se deben acumular los intereses del préstamo de \$10000; a las rentas R que están a la derecha debe descontárseles los respectivos intereses (porque se considera que se adelantan esos pagos y por ello no deben cobrarse intereses durante el tiempo que no se usa el dinero ajeno), y el pago R ubicado en la fecha de valuación no produce intereses. De esta manera la ecuación queda como sigue:

$$\begin{aligned} 10000\,(1 + 0.09)^3 &= R + R(1 + 0.09)^1 + R(1 + 0.09)^2 + R(1 + 0.09)^{-1} + R(1 + 0.09)^{-2} \\ &= R\,[1 + (1 + 0.09)^1 + (1 + 0.09)^2 + (1 + 0.09)^{-1} + (1 + 0.09)^{-2}] \end{aligned}$$

$R = \$2571.00$ Importe de cada uno de los cinco pagos anuales que cancelan una deuda de \$10000 al 9% anual

De los ejemplos 4 y 5 se observa que:

> Al comparar obligaciones en el tiempo con el modelo de interés compuesto, el valor de las obligaciones *no cambia* si se cambia la fecha de valuación. [4.5]

Es decir, la fecha de valuación puede seleccionarse arbitrariamente.

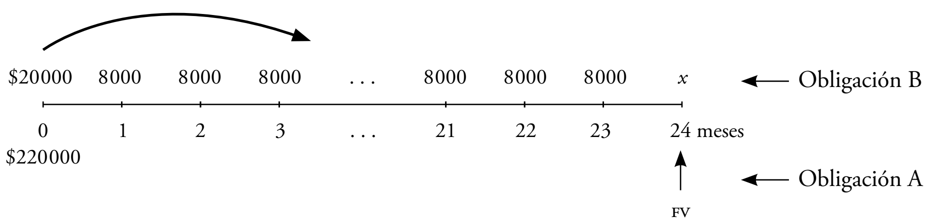
Ejemplo 6

El precio de contado de un automóvil nuevo es de $220000 y se desea adquirirlo mediante un financiamiento a dos años: un enganche de $20000, 23 pagos de $8000 mensuales y un último pago que saldaría la deuda; si la tasa de interés que se cobra por el crédito es de 18% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál sería el importe de ese último pago?

Solución

Es conveniente establecer una igualdad entre obligaciones; una de ellas es el precio de contado y la otra el financiamiento. No se especifica si los pagos se realizan al inicio o al final de cada periodo; cuando sea así, se sobreentenderá que los pagos se efectuarán al final del periodo. Se supondrá que el último pago se efectuará en el mes 24.

Se seleccionará como fecha de valuación el final del segundo año.



Se respeta el principio de equitatividad señalado en la expresión [4.1].[4]

Obligación A Precio de contado del automóvil (valuado al final del segundo año y a la tasa i^{12} = 18%)	=	**Obligación B** Enganche + serie de 24 pagos mensuales (valuado al final del segundo año y a la tasa i^{12} = 18%)

[4] Al expresar el principio de equitatividad, a partir de la ubicación de las obligaciones en el diagrama, se debe entender que es indiferente nombrar A o B a las obligaciones.

$$220000\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{24}=20000\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{24}+8000\left[\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{1}+\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{2}+\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{3}+\ldots+\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{23}\right]+x$$

$$314490.6186=28590.06+8000\left[\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{1}+\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{2}+\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{3}+\ldots+\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{23}\right]+x$$

$$314490.6186=28590.06+221068.17+x$$

$$x=\$64832.39$$

Por lo tanto, para adquirir el automóvil mediante financiamiento, se pagará en forma inmediata un enganche de \$20000, 23 mensualidades vencidas de \$8000 cada una y un pago de \$64832.39 a efectuarse en el mes número veinticuatro.

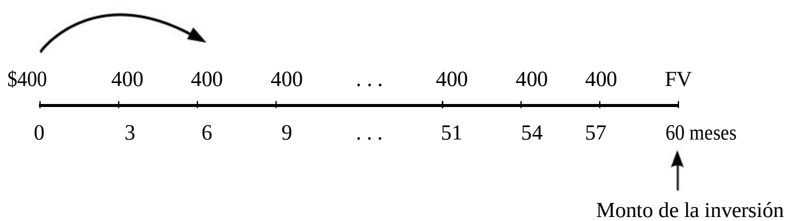
Ejemplo 7

¿Cuál es el monto de una inversión dentro de 5 años si al inicio de cada trimestre se invierten \$400 a una tasa anual efectiva de 6%?

Solución

Se puede responder considerando la aplicación de la tasa efectiva anual o bien una tasa anual capitalizable cada trimestre que sea equivalente a la proporcionada inicialmente.

En el siguiente diagrama se muestran las obligaciones de las partes:

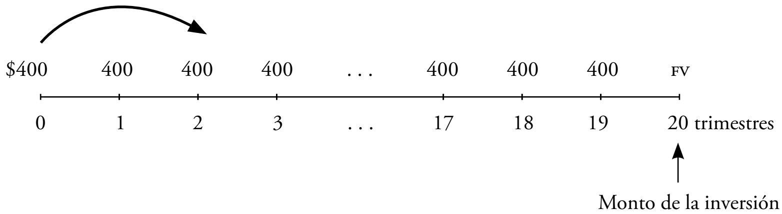


a) Empleando directamente la tasa proporcionada. La unidad de tiempo es el trimestre.

$$VF=400(1+0.06)^{\frac{3}{12}}+(1+0.06)^{\frac{6}{12}}+(1+0.06)^{\frac{9}{12}}+\ldots+(1+0.06)^{\frac{57}{12}}+(1+0.06)^{\frac{60}{12}}] \qquad [1]$$

$VF=\$\,9355.11$ Monto o valor futuro de la serie de depósitos dentro de 5 años

b) Calculando una tasa equivalente. La unidad de tiempo debe ser el trimestre



Se debe calcular una tasa efectiva trimestral *equivalente*, es decir, encontrar una tasa nominal capitalizable trimestralmente equivalente a 6% efectiva anual.

$$(1 + 0.06) = \left(1 + \frac{i}{\frac{360}{90}}\right)^{\frac{360}{90}}$$

$$\frac{i}{\frac{360}{90}} = 0.0146738 \qquad \text{Tasa efectiva trimestral}$$

$$i = 0.05869538 \qquad \text{Tasa nominal capitalizable trimestralmente}$$

Entonces, la ecuación [1] se reexpresaría así:

$$VF = 400\left[\left(1 + \frac{0.058695}{\frac{360}{90}}\right)^1 + \left(1 + \frac{0.058695}{\frac{360}{90}}\right)^2 + \ldots + \left(1 + \frac{0.058695}{\frac{360}{90}}\right)^{19} + \left(1 + \frac{0.058695}{\frac{360}{90}}\right)^{20}\right]$$

$$VF = 400\,[\,(1 + 0.01467375)^1 + (1 + 0.01467375)^2 + \ldots + (1 + 0.01467375)^{19} + (1 + 0.01467375)^{20}] \qquad [2]$$

$VF = \$9355.11.$

Obsérvese que ambos resultados (incisos a y b) son iguales.

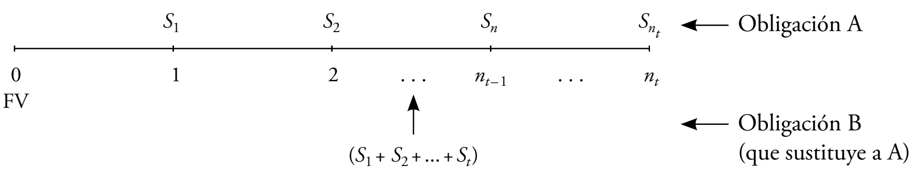
4.2 Fecha equivalente (tiempo desconocido)

Como se mencionó al inicio del capítulo 2, si se conoce cualquiera de las tres cantidades básicas, la cuarta se puede calcular. Ya vimos cuando el tiempo es la variable desconocida en operaciones que comprenden un pago único. Ahora consideraremos una situación presentada cuando se realizan varios pagos en diferentes puntos en el tiempo y se reemplazan por un pago *único* igual a la suma de todos ellos. El problema es encontrar el punto en el tiempo en el cual ese pago único es tal que equivale a los pagos que se realizan parcialmente, punto llamado *fecha equivalente*. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

El método de solución para encontrar la *fecha equivalente* considera al tiempo presente como fecha de valuación para establecer la ecuación de valor. A continuación se generaliza el cálculo del tiempo o *fecha equivalente*.

Sean $S_1, S_2, \dots, S_t$ cantidades a pagarse al final de $n_1, n_2, \dots n_t$ periodos, respectivamente. Se propone reemplazar esta serie de pagos por una cantidad única ($S_1 + S_2 + \dots + S_t$) al final de n periodos; si la tasa de interés involucrada es i efectiva por periodo, ¿cuál es esa fecha n tal que la nueva obligación sea equivalente a la original?; es decir, se propone calcular la *fecha equivalente* que sustituya a la deuda original.

En el siguiente diagrama se ubican las obligaciones:



Al emplear el principio de equitatividad señalado en la expresión [4.1]

$$(S_1 + S_2 + \dots + S_t)(1 + i)^{-n} = S_1(1 + i)^{-1} + S_2(1 + i)^{-2} + \dots + S_t(1 + i)^{-n_t} \quad [4.6]$$

como la única variable desconocida es n, la fecha equivalente, y se encuentra como exponente, se emplea la función logaritmo;[5] una vez aplicada ésta a ambos lados de la ecuación y después de algunas operaciones algebraicas se llega a:

$$n = \frac{\log(s_1 + s_2 + \dots + s_t) - \log(s_1(1 + i)^{-1} + s_2(1 + i)^{-2} + \dots + s_t(1 + i)^{-n_t})}{\log(1 + i)} \quad [4.7]$$

Ejemplo 8

Supóngase que se desea reemplazar una deuda (o serie de deudas) de \$20000, \$50000 y \$10000 a efectuarse dentro de 3, 6 y 9 meses respectivamente; la tasa de interés convenida es de 36% anual convertible semestralmente, ¿cuál sería la fecha equivalente de la operación?; es decir, si se deseara cancelar todos esos pagos por la cantidad única de \$80000, ¿cuándo se tendría que efectuar el pago?

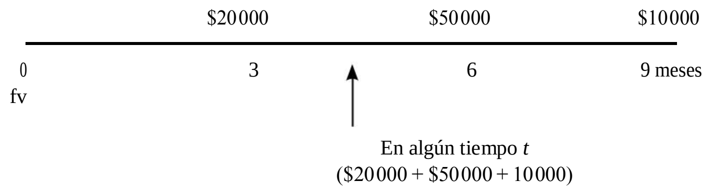
[5] Se puede emplear el logaritmo base 10 ($\log_{10}$) o bien el logaritmo base e (L_n).

Cuando aparecen series de pagos, como es el caso, se identifican tres tiempos:

a) El periodo de pago de la tasa de interés (o bien frecuencia del pago de la tasa de interés en el año).
b) El periodo del pago de la renta *R*.
c) El plazo de la operación.

En este ejemplo, a) se refiere al semestre (la tasa se paga con una frecuencia de 2 veces al año); b) es el trimestre y c) corresponde a 9 meses; el plazo es la longitud del tiempo que hay entre el momento que se pacta la operación, el momento presente, y el momento en que se cancela ésta junto con sus respectivos intereses.

Si se adopta aquí también la práctica de considerar como unidad de tiempo al periodo en que se paga realmente la tasa de interés, se puede emplear el mismo razona-miento desarrollado hasta ahora para resolver los problemas de la teoría del interés. Así, la unidad de tiempo es el semestre y las obligaciones se ubican de la siguiente manera:



El principio expresado en términos generales en la expresión [4.1] es:

Valor actual de un pago de $ 80,000 a efectuarse en la fecha t desconocida a una tasa de 36% anual capitalizable semestralmente	=	Valor actual de los pagos de $ 20,000, $ 30,000 y $10,000 a efectuarse durante 3, 6 y 9 meses, respectivamente, a una tasa de 36% anual capitalizable semestralmente

$$\$80000\left(1+\frac{.36}{\frac{360}{180}}\right)^{-t} = \$20000\left(1+\frac{.36}{\frac{360}{180}}\right)^{-\frac{90}{180}} + \$50000\left(1+\frac{.36}{\frac{360}{180}}\right)^{-\frac{180}{180}} + \$10000\left(1+\frac{.36}{\frac{360}{180}}\right)^{-\frac{270}{180}} \quad [4.8]$$

Una vez que se aplican logaritmos[6] para despejar a la variable desconocida *t*, se tiene:

t = 0.93007 semestres; es decir, 5 meses y 17 días aproximadamente.

[6] Se recomienda al lector realizar todos los cálculos hasta que considere que ya no es posible reducir la expresión [4.6] y entonces aplicar las leyes de logaritmos.

Por lo tanto, se pueden sustituir las deudas originales con un solo pago de \$80000 a efectuarse dentro de 0.93007 semestres con la seguridad de que ambas transacciones tienen el mismo valor para las partes.

Si se compara la expresión [4.6] con la ecuación [4.8] que introdujo el concepto de *fecha equivalente*, se observa la misma estructura sólo que en [4.8] el periodo de pago de la tasa no coincide con el periodo del pago del flujo de efectivo, lo que sí ocurre con la expresión [4.6]. Para usar directamente la expresión [4.7] se debe tener cuidado de que haya coincidencia entre ambos periodos de pago.

A continuación se muestra un ejemplo donde existe esta coincidencia de periodos. Aquí se puede emplear directamente la expresión [4.6] o si se desea la [4.7].

Se recomienda plantear una ecuación de valor directamente, tomando como fecha de comparación el momento presente para evitar confusiones al pretender emplear para cualquiera de los casos la ecuación [4.7].

Ejemplo 9

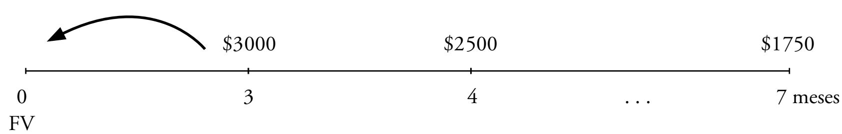
¿En qué fecha se descargarían en una sola exhibición las deudas de \$3000, \$2500 y \$1780 pagaderas en 3, 4 y 7 meses, respectivamente, si la tasa de interés es de 30% anual capitalizable mensualmente?

Solución

La fecha del pago único que reemplace los tres pagos a realizarse en las fechas acordadas (deuda original), en la que tanto para el deudor como para el acreedor la nueva obligación tiene el mismo valor en el tiempo, debe respetar el principio de equitatividad.

Pago único de \$7750 a efectuarse en cierta fecha desconocida a la tasa de 30% anual capitalizable mensualmente	=	Valor de los tres pagos a efectuarse en 3, 4 y 7 meses, respectivamente, a la tasa de 30% anual capitalizable mensualmente

La fecha de valuación para el cálculo de la fecha equivalente es forzosamente cero.



La unidad de tiempo generalmente se refiere al periodo de capitalización de la tasa de interés, porque facilita los cálculos; en este ejemplo en particular, el periodo de capitalización coincide con el periodo de pago, el mes. Así la tasa i efectiva mensual es: $i = \frac{0.30}{12} = 0.025$.

Si se empleara la expresión [4.7] para calcular la fecha equivalente, se tendría:

$$(3000 + 2500 + 1750)(1 + 0.025)^{-t} = 3000(1 + 0.025)^{-3} + 2500(1 + 0.025)^{-4} + 1750(1 + 0.025)^{-7}$$

$$(1 + 0.025)^{-t} = \frac{3000(1 + 0.025)^{-3} + 2500(1 + 0.025)^{-4} + 1750(1 + 0.025)^{-7}}{7280}$$

$$(1 + 0.025)^{-t} = 0.89946798$$

$$-t\log(1 + 0.025) = \log(0.89946798)$$

$$t = -\frac{\log(0.89946798)}{\log(1 + 0.025)}$$

$$t = 4.29 \text{ meses}$$

Por lo tanto, se puede sustituir la deuda (o deudas) originalmente contratada(s) por un pago único de \$7250 (que resulta de la suma de los pagos parciales en diferentes fechas) dentro de 3 meses y 12 días,[7] aproximadamente; es decir, la *fecha equivalente* de la operación es de 3.3833 meses.

Si se desea, se puede emplear la expresión [3.9] del capítulo 3, considerando que el tiempo es el año o fracción de año; por ejemplo:

$$(3000 + 2500 + 1750)\left(1 + \frac{\frac{0.36}{360}}{180}\right)^{-\frac{360}{30}\cdot t} = 3000\left(1 + \frac{\frac{0.36}{360}}{180}\right)^{-\frac{360}{30}\cdot\frac{90}{360}} + 2500\left(1 + \frac{\frac{0.36}{360}}{180}\right)^{-\frac{360}{30}\cdot\frac{120}{360}} + 1750\left(1 + \frac{\frac{0.36}{360}}{180}\right)^{-\frac{360}{30}\cdot\frac{210}{360}}$$

$$(1+0.25)^{-12}{}_{t} = 3000\ (1+0.025)^{-3} + 2500\ (1+0.025)^{-4} + 1750\ (1+0.025)^{-7}$$

Empleando el logaritmo decimal para despejar t:

$$t = 0.356695 \textit{ años}$$

$$\therefore\ t = 4.28 \textit{ meses.}$$

Para establecer una ecuación de tiempo y valor se recurre al principio de equitatividad que rige a toda operación financiera y deben considerarse los siguientes elementos:

1. Seleccionar una fecha de comparación en la que deban referirse todas las obligaciones.
2. Valuar cada obligación en la fecha seleccionada con una misma tasa de interés.
3. La fecha de valuación (fecha focal) se selecciona según lo acuerden las partes en el interés simple; véase ejemplo 4.
4. La fecha de valuación (fecha focal) se selecciona arbitrariamente en el interés compuesto; véase ejemplo 5.

[7] Se consideró que el mes es de 30 días.

Ejercicios propuestos

1. Si un documento con valor al vencimiento de $250000 se liquida en 5 años, determinar el importe de los pagos si la deuda se liquida en: a) en dos años, b) en 7 años. Considerando una tasa de interés de 25% capitalizable semestralmente.
   Sol.: a) $123,317.55, b) $400,451.66.
2. Una persona contrae una deuda que debe liquidar mediante un pago de $50,000 a un año y otro de $800 en 2 años. ¿Qué cantidad deberá pagar para liquidar la deuda en un solo pago? (La tasa de interés vigente es de 50% convertible mensualmente). Utilizar interés compuesto. Realizar: a) en este momento, b) en año y medio, c) en dos años. Utilizar interés compuesto.
   Sol.; a) $30,935 b) $64,502.92, c) $ 82,404.71.
3. Se contrata una deuda de $12000 al 21% nominal capitalizable trimestralmente. El acreedor acepta a cambio de recibir dos pagos dentro de 7 y 9 meses, respectivamente. Si el primer pago es la mitad del importe del segundo pagaré, encontrar el importe de cada pago parcial. Emplear interés compuesto.
   Sol.: $4,610.33 para 7 meses y $9,220.07 para 9 meses.
4. A cambio de pagos de $2000 al final de cuatro meses y $5000 al final de 10 meses, un inversionista acuerda pagar $3000 inmediatamente y realizar un pago adicional al final de tres meses. Encuentre la cantidad del pago adicional si la tasa de interés es: a) 6% efectivo anual y b) 6% capitalizable mensualmente. Utilizar interés simple.
   Sol.: a) 3,778.52, b) $3,778.52.
5. Una persona debe efectuar tres pagos: $5000 en forma inmediata, $4000 al final de 8 meses, y $10000 dentro de un año; sin embargo, el acreedor concede reestructurar la deuda por un pago único igual a la suma de las obligaciones originales; ¿cuál será la fecha equivalente en la que debe realizarse el pago único? La tasa de interés es de 15% nominal capitalizable semestralmente. Emplear interés compuesto.
   Sol.: 235 días aproximadamente.
6. ¿Cuál será el importe de cada uno de los cuatro pagos anuales que tendrán que hacerse para liquidar una deuda de $20,000 con vencimiento el día de hoy, suponiendo un rendimiento de 4% convertible trimestralmente, si el pago es vencido?. Emplear interés compuesto. Sol.: $5,517.65
7. Se dispone que una herencia se reparta entre 3 hijos cuyas edades son 5, 12 y 17 años, para que al cumplir 18 años cada uno de ellos reciba la parte que les corresponde. Las instrucciones al respecto son que el pago para cada hijo sea 10% superior al pago recibido por el hermano que le antecede. Si la herencia se invierte al 8.5% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál será el importe que recibirá cada uno de los hijos?. Considere que la herencia es de $1’000,000.
   Sol.: primer hijo: $504,324.54, segundo hijo: $554,756.99 y tercer hijo: $610,232.69

8. ¿En qué fecha se tendría que efectuar un pago de $15,000 para sustituir tres pagos de $1,000, $5,000 y $9,000 a efectuarse dentro de 2, 3 y 5 meses respectivamente? La tasa de interés que se cobra es de 14% nominal pagadero mensualmente. Use interés compuesto.
   Sol.: dentro de 4.13 meses aproximadamente (cuatro meses con cuatro días).
9. Una deuda se paga de forma mensual; el importe del pago anticipado es de $8,000 y se desea cambiar a pagos bimestrales vencidos. Si la tasa nominal capitalizable Semestralmente es de 50%, ¿cuál es el importe del nuevo pago?
   Emplee interés compuesto.
   Sol.: $16,920.56
10. Se desea encontrar el valor en el momento presente a una tasa de 11.5% de interés simple, de las siguientes obligaciones: $1,000 a vencerse dentro de tres meses, al 14%, $1,700 dentro de ocho meses con un interés de 12%, y $800 a vencerse dentro de un año al 13%. Use interés simple.
    Sol.: $3,522.10
11. Se pretende acumular en un banco $10,000 al 8% anual convertible mensualmente al final de 7 meses mediante 2 depósitos desconocidos de tal manera que el segundo sea la cuarta parte del primero. Si el primero de los depósitos se efectúa en este momento y el segundo dentro de un mes y medio, ¿cuál es el importe de cada uno de los depósitos? Use la regla ordinaria.
    a) Emplee interés simple, b) emplee interés compuesto.
    Sol.: a) primer pago $7,658.48, b) segundo pago $1,914.62
12. Se desea sustituir una serie de pagos quincenales en forma vencida de $4,250 por otra serie de pagos bimestrales anticipados, ¿cuál es el importe de cada pago bimestral si actúa una tasa de interés de 26.4% anual capitalizable quincenalmente? Use interés compuesto.
    Sol.: $16,542.59.
13. Una persona se obliga a pagar $5000 en forma inmediata, $4,000 al final de 8 meses y $10,000 dentro de un año; el acreedor propone reestructurar la deuda por un pago de $19,000, ¿cuál sería la fecha en la que se tendría que efectuar ese pago único de tal manera que sea equivalente a la serie de los tres pagos acordados originalmente, si la tasa de interés es de 7.42% anual convertible cada 28 días? Use interés simple.
    Sol.: dentro de 7 meses con 25 días aproximadamente.

Conviene recordar

1. La ecuación de valor es la columna vertebral de la teoría del interés porque permite establecer la equitatividad de las obligaciones del deudor y del acreedor, con lo cual contribuye a que ambas partes ganen; por ello en los negocios se emplea esta teoría para valuar obligaciones financieras.

2. Para establecer una ecuación de valor se debe seleccionar una fecha de valuación (o fecha focal) y evaluar las obligaciones con una misma tasa de interés y en la misma fecha.

3. En el modelo de interés simple, el valor de las obligaciones *sí cambia* si se cambia la fecha de valuación.

4. En el modelo de capitalización (interés compuesto), el valor de las obligaciones *no cambia* si se cambia de fecha de valuación.

Fórmulas financieras

Principio de equitatividad en una transacción financiera

Obligación A (valuada a una cierta fecha y a una cierta tasa de interés)	=	**Obligación B** (valuada a una misma fecha y con la misma tasa de interés)

Cálculo de la fecha equivalente al sustituir una serie de pagos por un único pago

$$n = \frac{\log(S_1 + S_2 + \dots + S_t) - \log(S_1 (1+i)^{-1} + S_2 (1+i)^{-2} + \dots + S_t (1+i)^{-n_t})}{\log(1+i)}$$

Capítulo 5
Anualidades ciertas

Introducción

En los negocios existen situaciones en las que debe decidirse entre una o más opciones; por ejemplo comprar a crédito o al contado, es decir, efectuar un pago único o una serie de pagos en el futuro, ya sea que esos pagos sean fijos o variables en el tiempo.

También puede presentarse la necesidad de acumular un fondo de ahorro para después de cierto tiempo disponer de él por medio de retiros periódicos, por ejemplo; o bien si se conoce el capital necesario a invertir hoy, para tener la garantía de efectuar retiros futuros, se preguntaría por el importe de esos retiros.

Para saber cuál es la mejor opción debe emplearse una medida estándar o herramienta que compare todas las opciones. Esta medida considera el valor, en este momento, de la serie de pagos futuros, o bien su valor en el futuro, cuando ya todos los pagos se han realizado; se habla así del *valor presente* y del *valor futuro*, respectivamente, de la serie de pagos.[1]

Debe señalarse que la técnica empleada más frecuentemente en la toma de decisiones en los negocios es la del valor presente.

¿A quién se le paga? Los pagos o rentas denotan indistintamente cantidades de dinero que nos pagan o que pagamos, es decir, pueden ser series de depósitos para efectos de acumulación o propiamente series de pagos que cancelan deudas.

El objetivo de este capítulo es conocer, calcular e interpretar series de obligaciones en el largo plazo para adquirir financiamiento, reestructurar deudas o crear fondos de ahorro.

5.1 Definiciones

Una *anualidad* se define como una serie de pagos (o rentas) generalmente iguales realizados a intervalos regulares de tiempo. Los pagos pueden efectuarse al inicio o al final del intervalo.

[1] Se considera como *serie* a dos o más pagos, aunque también puede considerarse un pago como una serie de un término.

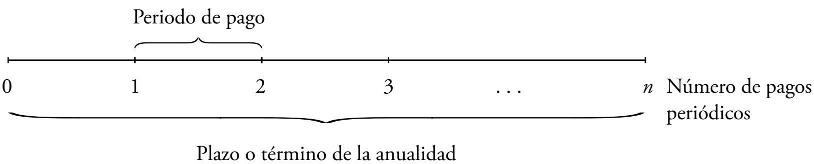
La palabra *anualidad* no se refiere necesariamente a pagos realizados anualmente: éstos a menudo se realizan con otras periodicidades, tales como días, semanas, meses, bimestres, trimestres, entre otros muchos.

Varios factores relacionados con el tiempo afectan el valor presente o el valor futuro de una anualidad:

Sea:

Renta:	Importe de cada pago periódico.
Plazo o término de la anualidad:	Longitud de tiempo entre el comienzo del primer periodo de pago y el final del último pago. Periodo fijo de tiempo durante el cual se realizan los pagos.
Intervalo de pago o periodo de pago:	Longitud de tiempo entre cada pago sucesivo de la anualidad.

A continuación se muestra gráficamente los diferentes tiempos involucrados en una anualidad; debe notarse que a partir de ahora, la subdivisión de los intervalos en la recta de tiempo se refiere a periodos de pago de la renta.



Existe otro tiempo que interviene en una anualidad; se refiere al periodo de capitalización (o pago) de la tasa de interés. Puede haber o no coincidencia entre este periodo y el periodo de pago de la renta; por ejemplo, si la renta se paga cada seis meses y la tasa de interés se capitaliza mensualmente, no hay una coincidencia. En el caso de anualidades, cuando se hable de *tasa efectiva de interés* (o tasa por periodo de pago) se sobreentenderá que el *periodo de pago* se refiere a la longitud del intervalo en el cual se efectúa el pago de la renta.

5.2 Clasificación de anualidades

Las anualidades se clasifican atendiendo a sus propiedades.

5.2.1 Atendiendo a la certeza con la que se realiza la serie de pagos (rentas)

Anualidades ciertas: Se conoce el momento en que se realiza el primer pago y el momento del último pago de la serie, es decir, el plazo y, por lo tanto, el número de pagos a efectuarse; se tiene la certeza de que se efectuarán todos los pagos.

mento en que la operación quedó formalizada. Este momento recibe el nombre de *momento inicial* o *presente*. El intervalo de tiempo que transcurre entre el momento inicial y el inicio del periodo de pagos se llama *periodo de gracia*; este periodo se mide utilizando como unidad de tiempo el correspondiente a los periodos de pago. Mientras transcurre el periodo de gracia se pueden verificar dos situaciones:

a) Que al final de cada periodo se paguen los intereses del capital original. En este caso se dice que hay servicio de intereses. El capital permanece constante durante todo el periodo de gracia, de tal manera que el capital al comienzo del plazo es igual al capital original.

b) Que los intereses generados se capitalicen en cada periodo, dentro del periodo de gracia. En este caso, el valor del capital al comienzo del plazo será igual al capital original más los intereses capitalizados.

5.2.3 Atendiendo al importe de los pagos o rentas

Anualidades fijas: Si el importe de la serie de pagos no cambia en el tiempo.

Anualidades variables: Si el importe de la serie de pagos cambia en el tiempo. Los pagos pueden aumentar o disminuir de acuerdo con un comportamiento predecible, estos cambios en el importe del pago son del tipo aritmético o geométrico; por ello se habla de las anualidades variables, como series de pagos en progresión aritmética o en progresión geométrica, respectivamente.

5.2.4 Atendiendo a la tasa de interés

Anualidad con tasa de interés fija: Si la tasa de interés no cambia durante el término de la anualidad.

Series

Una *serie en progresión geométrica* es una expresión formada por los términos de una sucesión geométrica separados por el signo más (+).
Serie finita en progresión geométrica:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

Si se ejecutara la suma indicada, la serie se convertiría en un número. Este número, o suma de los primeros términos de la serie, es el que interesa en el caso de las anualidades y se denota por S_n.

¿Cómo se obtiene la suma S_n de los primeros n términos de una serie finita en progresión geométrica?

Como
$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \qquad [1]$$
$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \qquad [2]$$

Restando [2] de [1]:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ -r \cdot S_n &= -(ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n) \end{aligned}$$

$$S_n - r \cdot S_n = a - 0 - 0 - 0 - \dots - 0 - ar^n$$

$$\begin{aligned} S_n - (r \cdot S_n) &= a - ar^n \\ S_n(1 - r) &= a(1 - r^n) \end{aligned}$$

$$\therefore \; S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \quad \text{para} -1 < r < 1 \qquad [5.1]$$

Con esta expresión se obtiene la suma de los primeros n términos de una serie en progresión geométrica.

Las sucesiones que se estudian en el libro son todas convergentes, es decir, son sucesiones acotadas inferior y superiormente, crecientes o decrecientes y su límite es único. Las demostraciones del teorema de convergencia quedan fuera del propósito de este libro.

Anualidad con tasa de interés variable: Si la tasa de interés cambia durante el término de la anualidad.

De acuerdo con las clasificaciones anteriores, se habla de:

1) Anualidades *fijas* con tasa *fija.*
2) Anualidades *fijas* con tasa *variable.*
3) Anualidades variables en progresión aritmética o geométrica.
   a) *Con tasa fija.*
   b) *Con tasa variable.*

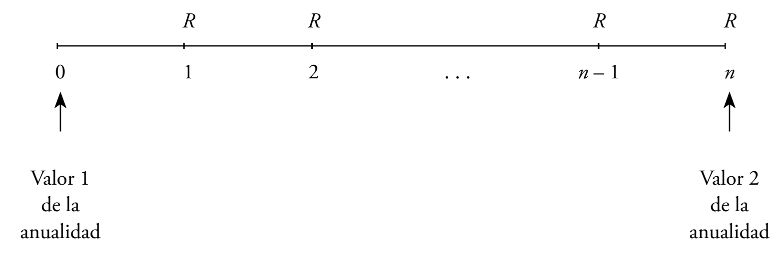
Las anualidades que trabaja usualmente el administrador son las anualidades ciertas, vencidas y anticipadas, con pagos fijos a tasa fijas y con pagos fijos a tasa variable. Son éstas las que se abordan en este documento.

5.3 Anualidades donde la frecuencia del pago periódico *R* coincide en el periodo de pago de la tasa de interés

A continuación se muestra el caso de una anualidad fija (o serie de pagos *R*), con una tasa de interés fija por periodo de pago de la renta; los pagos se realizan en forma vencida.

Sea: *R:* Importe del pago periódico.
i: Tasa de interés efectiva por periodo vigente durante el término de la anualidad.
n: Duración o término de la anualidad.

Figura 5.1



Debe observarse que se realizan n pagos de importe fijo R; cada pago se realiza al final de cada periodo; la tasa de interés es fija (efectiva por periodo de pago); el periodo de pago es el mismo durante el término de la anualidad (intervalos iguales).

También debe señalarse que éste es un caso en que la frecuencia del pago periódico *R* coincide con el periodo de capitalización (o pago) de la tasa de interés.

Los valores señalados en la figura 5.1 corresponden, en el primer caso (valor 1), al valor presente de la serie de pagos *R,* y el valor 2 al valor futuro (o acumulado) de la serie de pagos.

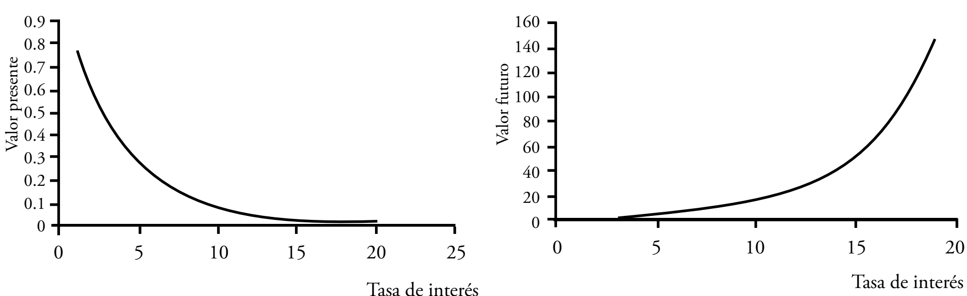
En el cuadro 5.1 se presentan ambos valores (valor presente y valor futuro) para el caso más general de anualidades vencidas y anticipadas cuyos pagos son de *R* por periodo. La tasa de interés es efectiva por periodo de pago de la renta *R* y fija durante el término de la anualidad.

$$VP = \$1[(1+i)^{-1} + \$1(1+i)^{-2} + \ldots + \$1(1+i)^{-n}]$$

Valor presente de una anualidad unitaria vencida

Para observar el tipo de relación entre el valor presente de una serie de pagos y la tasa de interés, así como entre el valor acumulado de la serie y la tasa de interés, en la gráfica 5.1 aparecen ambos valores para el caso de una anualidad unitaria[2] vencida, respectivamente. En la gráfica 5.1 (a) se aprecia que hay una relación inversa entre el valor presente y la tasa de interés: a medida que ésta aumenta, aquél disminuye; este resultado permite obtener condiciones favorables para las partes involucradas en la operación. El prestatario puede cancelar sus deudas (o serie de deudas) en una sola exhibición cuando la tasa contratada aumenta, obtendrá así una reducción significativa en el pago de intereses, por ejemplo; en la parte (b) de la misma gráfica la relación es más evidente: a medida que aumenta la tasa de interés, el valor acumulado también aumenta, es decir, se presenta una relación directa.

Gráfica 5.1
Relación entre la tasa de interés y el valor presente y valor futuro (o acumulado) de una anualidad (o serie de pagos)



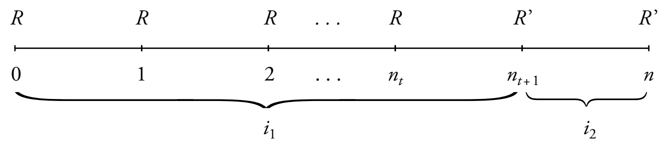
(a) (b)

[2] Las rentas unitarias son un caso muy especial de las anualidades; la serie de pagos periódicos es de \$1; representan en sí mismas el caso más general de anualidades porque bastaría multiplicar el pago *R* por el valor presente o acumulado de la renta unitaria; véanse las expresiones entre corchetes de las ecuaciones de valor del cuadro 5.1.

Las anualidades más comunes son las *fijas con tasa variable*, es decir, los pagos no cambian durante la vigencia de la tasa de interés; al cambiar la tasa de interés, los pagos se recalculan a la nueva tasa y permanecen fijos durante la vigencia de la tasa.

El siguiente diagrama ilustra un caso simple[3] de anualidades fijas con tasa variable.

Sea R: Importe del pago periódico.
R': Importe del nuevo pago periódico.
i_1: Tasa de interés efectiva por periodo vigente en el periodo n_t.
i_2: Tasa de interés efectiva por periodo vigente en el periodo n_{t+1}.
n: Duración o término de la anualidad.



Este tipo de anualidades se aborda de acuerdo con la metodología del documento; por ello, aunque no se aborden explícitamente desde el punto de vista teórico, sí es posible evaluarlas.

Ejemplos sobre anualidades ciertas donde el periodo de pago de la renta coincide con el periodo de pago de la tasa de interés

En los ejemplos siguientes es opcional el empleo de la suma de los primeros términos de una serie en progresión geométrica [5.1]; el lector puede emplear una hoja electrónica de cálculo o, si es paciente, una calculadora de bolsillo.

Ejemplo 1

La empresa A emitió una obligación de \$1 000 a diez años. Los pagos de intereses por \$60 deben hacerse al final de cada año, durante 10 años, y los \$1000 del capital deben pagarse al final del décimo año. La empresa B emitió una obligación de \$1000 a 20 años. Los pagos de intereses por \$60 deben hacerse al final de cada uno de los 20 años. ¿Cuál es el precio de mercado de cada obligación si ambas empresas venden las obligaciones para que tengan un rendimiento de 4, 6 y 8% anual a interés compuesto? (vender para producir un 4, 6 y 8% anual de interés compuesto significa que el

[3] El caso es simple porque se considera que sólo hay un cambio de tasa durante el plazo de la anualidad y porque se consideran sólo tasas efectivas por periodo de pago de la renta; en el mercado las tasas de interés son variables y tienen una vigencia de siete días.

precio de mercado de la obligación es igual al valor actual de los pagos al 4, 6 y 8% anual a interés compuesto).

Comente acerca del efecto que tienen los años hasta el vencimiento (es decir, la fecha de vencimiento) en el precio de mercado de una obligación.

Cuadro 5.1
Valores de una anualidad: valor presente y valor futuro. Ubicación en el tiempo de series de pagos anticipados y vencidos para establecer la ecuación de valor

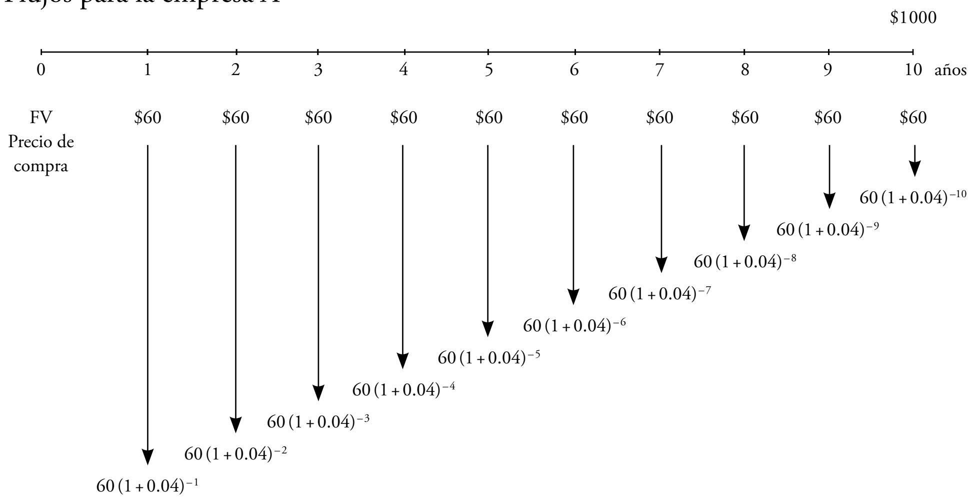
Valores de una anualidad	Diagrama de tiempo	Ecuación de valor
Valor presente (VP) de una serie de pagos R efectuados en forma *anticipada* durante n periodos a la tasa de interés i efectiva por periodo de pago de la renta	R R R . . . R 0 1 2 . . . $n-1$ n periodos de pagos de la renta ↑ FV	$VP = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \dots + R(1+i)^{-(n-1)}$ $VP = R\underbrace{[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)}]}_{\text{Valor presente de rentas unitarias}}$
Valor presente (VP) de una serie de pagos R efectuados en forma *vencida* durante n periodos a la tasa de interés i efectiva por periodo de pago de la renta	R R . . . R R 0 1 2 . . . $n-1$ n periodos de pagos de la renta ↑ FV	$VP = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \dots + R(1+i)^{-n}$ $VP = R[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n}]$
Valor futuro (VF) de una serie de pagos R efectuados en forma *anticipada* durante n periodos a la tasa de interés i efectiva por periodo de pago de la renta	R R R . . . R 0 1 2 . . . $n-1$ n periodos de pagos de la renta ↑ FV	$VF = R(1+i)^1 + R(1+i)^2 + R(1+i)^3 + \dots + R(1+i)^n$ $VF = R[(1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^n]$
Valor futuro (VF) de una serie de pagos R efectuados en forma *vencida* durante n periodos a la tasa de interés i efectiva por periodo de pago de la renta	R R . . . R R 0 1 2 . . . $n-1$ n periodos de pagos de la renta ↑ FV	$VF = R + R(1+i)^1 + R(1+i)^2 + R(1+i)^3 + \dots + R(1+i)^{n-1}$ $VF = R[1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1}]$

Solución

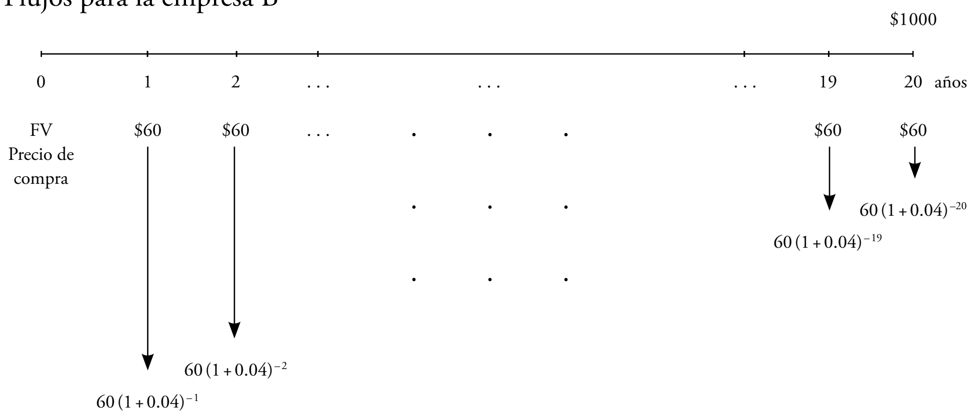
Como se busca el precio de mercado, la fecha de valuación es el momento presente;[4] al final de las flechas en cada diagrama se muestra el valor presente de cada pago de intereses.

[4] La unidad de tiempo (periodo de capitalización) es el año: corresponde al periodo de pago de la renta R = \$60.

Flujos para la empresa A



Flujos para la empresa B



El valor presente (VP) de la obligación de las empresas a la tasa i efectiva anual es:

$$VP = 60\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n}\right] + 1000\,(1+i)^{-n} \qquad [5.2]$$

Obsérvese que la expresión entre corchetes corresponde al valor presente de una serie de rentas unitarias vencidas. (Véase el cuadro 5.1.)

De esta manera, para cada empresa su precio de mercado o valor presente de las obligaciones se obtiene al sustituir en la expresión [5.2] la tasa de 4%, 6% y 10%, respectivamente.

A continuación se muestra el caso para la empresa A con la tasa de 4% efectiva anual:

$$VP = 60\left[(1+0.04)^{-1} + (1+0.04)^{-2} + \ldots + (1+0.04)^{-10}\right] + 1000\,(1+0.04)^{-10}$$

El cuadro 5.2 resume el precio de mercado de ambas empresas, de acuerdo con la tasa de rendimiento deseada. En él se aprecia que el precio de mercado disminuye a medida que aumenta la tasa de interés, es decir, hay una relación inversa entre el precio de mercado y la tasa de rendimiento, comportamiento ilustrado en la gráfica 5.1, inciso a).

Cuadro 5.2
Precios de mercado
para dos obligaciones a diferentes tasas de interés

Periodo de tiempo (año) t	Cantidad al final de t	Valor presente		
10 años	$1000	4%	6%	8%
20 años	$1000	8110	7360	6710

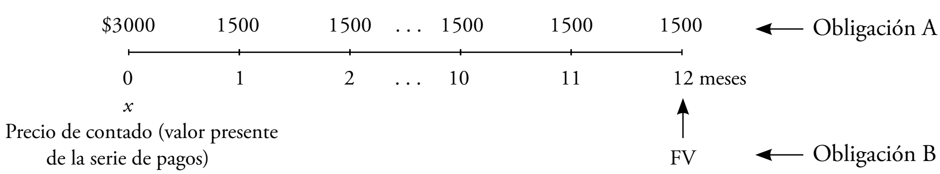
Si a las empresas no les importa el plazo de las obligaciones, les conviene venderlas al 4% anual.

Ejemplo 2

Una máquina se vende a plazos con una cuota inicial de $3000 y el saldo en 12 cuotas mensuales de $1500 cada una, cargando 16% de interés convertible mensualmente. Calcular el precio de contado de la máquina.

Solución

Se tomará como unidad de tiempo el mes y se seleccionará arbitrariamente como fecha de valuación el mes 12.[5]



[5] El lector puede elegir el momento presente —que es el momento más recomendable— y comprobar que llegará al mismo resultado.

El precio de contado está en el momento presente; si se considera el principio de equitatividad:

Obligación A Serie de pagos + enganche valuados en el mes 12 y a la tasa de 16% anual capitalizable mensualmente	=	**Obligación B** Precio de contado valuados en el mes 12 y a la tasa de 16% anual capitalizable mensualmente

$$1500 + 1500\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^1 + 1500\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^2 + 1500\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^3 + \ldots + 1500\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^{11} + 3000\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^{12} = x\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^{12}$$

$$1500\underbrace{\left[1+\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^1+\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^2+\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^3+\ldots+\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^{11}\right]}_{\text{Serie de rentas unitarias}} + 3000\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^{12} = x\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^{12}$$

Como la serie de rentas unitarias es del tipo geométrico se puede facilitar el cálculo mediante la suma

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Como $a = 1$

$$r = \left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^1$$

$$n = 12$$

$$S_n = \frac{1\left(1-\left(1+\frac{0.16}{12}\right)^{12}\right)}{1-\left(1+\frac{0.16}{12}\right)^1} = 12.92030987$$

$$1500\,[12.92030987] + 3000\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^{12} = x\left(1+\frac{0.16}{\frac{360}{30}}\right)^{12}$$

$$x = \$19532$$

Es el precio de contado de la máquina

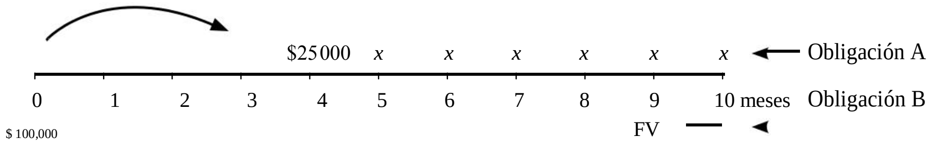
5.4 Anualidades ciertas donde no necesariamente se hace coincidir la frecuencia del pago de la tasa de interés con la frecuencia del pago de la renta

Ejemplo 3

Un préstamo hipotecario de \$100000 con intereses de 3.5% efectivo anual se devolverá mediante un pago de \$25000 al término de cuatro meses, seguido de 6 pagos mensuales iguales. Encuentre el pago periódico.

Solución

Se considera como unidad de tiempo el año y se selecciona arbitrariamente como fecha de valuación el mes número 10. Debe observarse que el enganche se difiere cuatro meses.



Si se establece el principio de equitatividad [4.1] visto en el capítulo 4:

$$\underbrace{10000(1+0.035)^{\frac{300}{360}}}_{\text{Valor de \$100000 dentro}} = \underbrace{x+(1+0.035)^{\frac{30}{360}}+\ x(1+0.035)^{\frac{150}{360}}+25{,}000\ (1+0.035)^{\frac{180}{360}}}_{\text{Valor acumulado de los 6 pagos y del enganche de 10 meses}}$$

x = $12,820.00 Importe de cada pago mensual a realizarse durante 6 meses; con ellos, más $25,000, se cancela el crédito hipotecario de $100,000

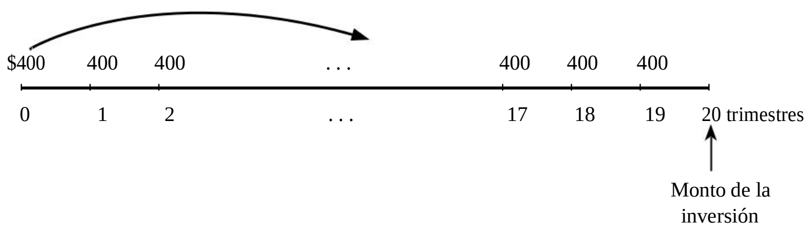
El lector puede calcular una tasa nominal capitalizable mensualmente equivalente a 3.5% efectivo anual y plantear nuevamente la ecuación de valor; podrá ver que se facilitan los cálculos.

Ejemplo 4

Al inicio de cada trimestre se invierten $400 a la tasa de 6% efectivo anual, ¿cuál es el monto de la inversión en 5 años?

Solución

En el siguiente diagrama se observa que las rentas se pagan al inicio de cada trimestre, por lo cual empiezan en el momento “0” y terminan en el periodo 19; sin embargo son 20 rentas.



Aquí no coincide el periodo de pago de la tasa de interés (año) con el periodo de pago de la renta (trimestre). Se puede obtener el valor buscado, el monto de la anualidad, por dos caminos:

a) Calculando una tasa de interés equivalente apropiada, cuyos periodos de pago coincidan con el trimestre, que es el periodo de pago de la renta;[6] o bien
b) empleando directamente la tasa proporcionada según la expresión [3.3] del capítulo 3 para cada pago, o si se desea la expresión [3.10].

a) Calculando una tasa equivalente

Véase ejemplo 7 del capítulo 4.

b) Empleando directamente la tasa proporcionada y el tiempo expresado en días.

Si la unidad de tiempo es el año, se emplea directamente la expresión [3.3] del capítulo 3 para cada renta:

$$VF = 400\left[(1+0.06)^{\frac{90}{360}} + (1+0.06)^{\frac{180}{360}} + (1+0.06)^{\frac{270}{360}} + \ldots + (1+0.06)^{\frac{1620}{360}} + (1+0.06)^{\frac{1710}{360}} + (1+0.06)^{\frac{1800}{360}}\right]$$

$VF = \$9355$

Con el ejemplo 4 se observa que cuando se emplea una tasa efectiva por periodo de pago de la renta, como en (b), los exponentes son siempre enteros, positivos o negativos según se haya seleccionado la fecha de valuación; cuando no coinciden ambos periodos de pago, como en (a), los exponentes son fraccionarios, positivos o negativos según se haya seleccionado la fecha de valuación. Así, las preguntas son: ¿cuándo emplear tasas efectivas pagaderas por periodo de pago de la renta?, ¿por qué se debe hacer coincidir ambos periodos? La primera pregunta es para emplear calculadora financiera o la función financiera de Excel de Microsoft. La segunda es porque ambas herramientas sólo aplican tasas efectivas por periodo de pago de la renta.

> Si se desea reducir la suma de los 20 términos de la serie geométrica:
>
> $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$
>
> Como $a = (1+0.06)^{\frac{90}{360}}$
>
> $r = (1+0.06)^{\frac{90}{360}}$
>
> $n = 20$
>
> $$VF = 400\,(1+0.06)^{\frac{90}{360}}\left[\frac{1-\left((1+0.06)^{\frac{90}{360}}\right)^{20}}{1-(1+0.06)^{\frac{90}{360}}}\right]$$

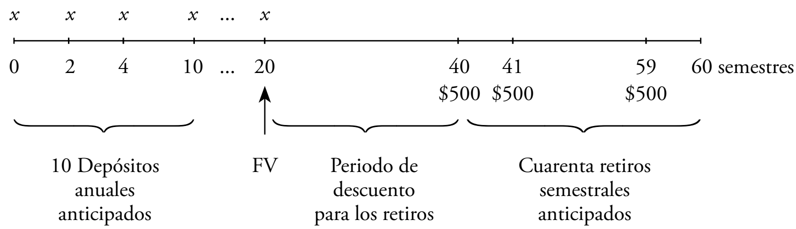
[6] También puede encontrarse una renta pagadera anualmente *equivalente* al pago de la renta trimestral, con ello se lograría hacer coincidir los periodos de pago de la tasa y de la renta.

Ejemplo 5

Se efectúan depósitos anuales al inicio de cada año durante un periodo de 10 años a fin de proporcionar 40 pagos semestrales de $500; el primer pago deberá efectuarse 10 años después de efectuado el último depósito. Encontrar una expresión para el depósito anual, en términos de anualidades anticipadas, suponiendo una tasa de interés de 20% anual pagadera semestralmente. Se considera que el pago de depósitos debe ser suficiente para realizar los retiros hasta agotar el fondo.

Solución

La serie de depósitos *x* y la serie de retiros, ambos anticipados, se ubican en el siguiente diagrama de tiempo:



Se acumulan los depósitos *x* en el semestre número 20 y se descuenta el valor presente de la serie de retiros considerando como fecha de valuación el semestre 40 en esa misma fecha. La valuación, en este caso para efectos didácticos, se inicia a partir de los valores más cercanos a la fecha de valuación. La siguiente ecuación de valor puede despejarse para *x* directamente[7] o bien puede reducirse la suma de las series geométricas como se muestra en el recuadro.

$$\underbrace{x\left[\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{2}+\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{4}+\ldots+\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{20}\right]}_{\text{Serie geométrica: 10 pagos anuales}}=500\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{-20}\underbrace{\left[1+\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{-1}+\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{-2}+\ldots+\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{-39}\right]}_{\text{Serie geométrica: 40 pagos semestrales}}$$

La expresión pedida para los depósitos en términos de anualidades anticipadas es:

$$x\left[\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{2}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{20}}{1-\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{2}}\right]=500\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{-20}\cdot\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{-40}}{1-\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{-1}}\right]$$

[7] Puede emplear una calculadora de bolsillo o una hoja electrónica de cálculo.

Es el importe de los cuarenta pagos semestrales que se podrían retirar si se depositaran \$500 en forma anticipada durante 10 años.

De la suma de los 10 términos de la primera serie geométrica se obtiene:

$$a = \left(1 + \frac{0.20}{2}\right)^2$$

$$r = \left(1 + \frac{0.20}{2}\right)^2$$

$$n = 10$$

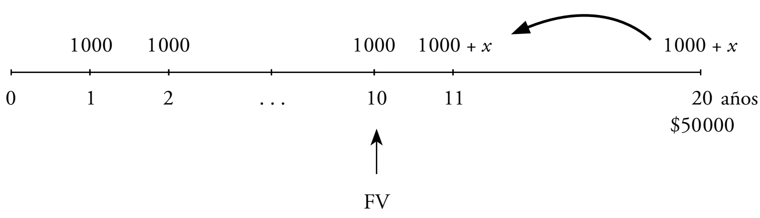
$$S_n = \left(1 + \frac{0.20}{2}\right)^2 \left[\frac{1 - \left(\left(1 + \frac{0.20}{2}\right)^2\right)^{10}}{1 - \left(1 + \frac{0.20}{2}\right)^2} \right]$$

Ejemplo 6

Una persona desea acumular \$50000 en un fondo al término de 20 años. Si deposita \$1000 al final de cada uno de los primeros 10 años y \$1000 + x al final de cada uno de los 10 años restantes en dicho fondo, ¿cuál será el valor de x si el fondo gana una tasa efectiva de 4%? Considérese como unidad de tiempo el año.

Solución

El diagrama de tiempo con las obligaciones es:



$$\$50000\,(1+0.04)^{-10} = 1000\,\underbrace{[1+(1+0.04)^{1}+(1+0.04)^{2}+\ldots+(1+0.04)^{9}]}_{\substack{\text{Serie en progresión geométrica} \\ \text{de razón } (1+0.04)}} + (1000+x)\,\underbrace{[1+(1+0.04)^{-1}+(1+0.04)^{-2}+\ldots+(1+0.04)^{-10}]}_{\substack{\text{Serie en progresión geométrica} \\ \text{de razón } (1+0.04)^{-1}}}$$

Si se emplea la expresión [5.1] para abreviar la suma de ambas series:

$$50000\,(1+0.04)^{-10} = 1000\left[1 \bullet \frac{(1-(1+0.04)^{10})}{1-\ (1+0.04)}\right] + \left[(1000+x)\,(1+0.04)^{-1}\left(\frac{1-(1+0.04)^{-10}}{1-\ (1+0.04)^{-1}}\right)\right]$$

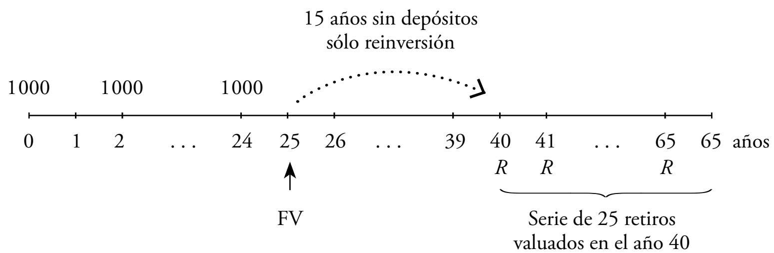
$x = \$1684.46$ Es la cantidad adicional a \$1000 que se empieza a depositar al final del undécimo año durante 10 años

Ejemplo 7

Una persona que inicia su vida activa como trabajador en este momento, desea acumular un fondo para su retiro depositando \$1000 al inicio de cada año durante un plazo de 25 años. Quince años después desea realizar 25 retiros anuales al inicio de cada año. Suponiendo que todos los pagos se harán realmente, ¿cuál será el importe de cada retiro que deberá realizar si la tasa de interés es de 4% efectiva durante los primeros 25 años y de 3.5% para los años posteriores?

Esta persona empieza a ahorrar al inicio de su vida activa; el primer retiro lo efectuará dentro de 40 años.

Solución



Sea R el importe de cada retiro a efectuarse 15 años después del último depósito y durante 25 años (hasta el año 64).

Los depósitos se valuarán en el año 25; se calculará el "valor presente" de los retiros en el año 40 y se descontará este valor con el factor apropiado durante 15 años para mantener así la ecuación de valor con fecha de comparación el año 25.

$$\begin{aligned}
1000\,[(1+0.04)^1+(1+0.04)^2+\ldots+(1+0.04)^{25}] &= R(1+0.035)^{-15}\,[1+(1+0.035)^{-1}+(1+0.035)^{-2}+\ldots+(1+0.035)^{-24}]\\
1000\,(43.3117446) &= R(1+0.035)^{-15}\,(17.0583676)\\
43311.75 &= R\,(1+0.035)^{-15}\,(17.0583676)\\
\$4253.76 &= R
\end{aligned}$$

Si esta persona deposita anualmente \$1000 durante 25 años en forma anticipada ganando un rendimiento de 4% anual, podrá retirar \$4253.76 anualmente durante 25 años. El primer retiro lo efectuará 15 años después de haber efectuado el último depósito.

Después de cada retiro el remanente continúa invirtiéndose al 3.5% anual.

5.5 Anualidades donde el número de pagos *n* o la tasa de interés *i* se desconoce

Hasta ahora se han resuelto casos de anualidades en los que el valor presente, el valor futuro o el pago periódico (renta) son desconocidos. A continuación se tratan casos para cuando el número de rentas o la tasa de interés n o i son desconocidos.

5.5.1 Número de pagos desconocidos (n)

Los casos de anualidad que involucran un tiempo desconocido durante el cual se efectuarán los pagos periódicos, no producen valores enteros para n. En la práctica es inconveniente efectuar un pago en una fecha que no corresponda a un número entero de periodos.

Lo que se usa es hacer un pago fraccionario adicional al pago completo en el mismo momento en que se efectúa el último pago regular o hacer un pago fraccionario un periodo después del último pago regular. En el primer caso, el último pago es más grande que los pagos regulares, y en el segundo, más pequeño. En cualquier caso, tales pagos deben ser equivalentes en valor.

A continuación se muestran los casos que involucran anualidades con tiempo desconocido.

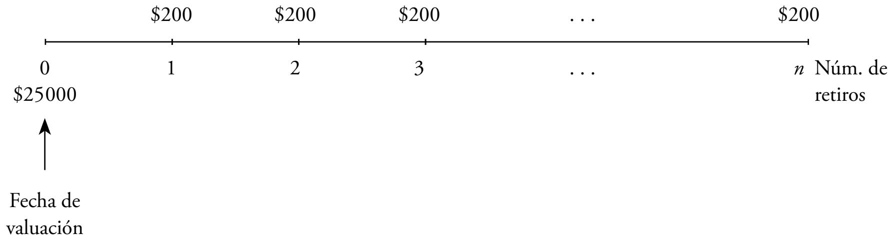
Ejemplo 8

¿Durante cuánto tiempo se podrán hacer retiros mensuales completos por \$200 cada uno si para ello se invierten \$25000 a una tasa de interés anual de 7% convertible mensualmente? Si existiera un pago adicional con el que se agote el fondo, ¿cuál sería su importe?

Solución

Explícitamente, no se dice si el pago es vencido o anticipado; cuando así sucede, se sobreentiende que es vencido.

Aquí sí coinciden ambos periodos de pago. La unidad de tiempo no puede ser otra que el mes (para facilidad de escritura obsérvese que 360/30 = 12):



$$25000 = 200\underbrace{\left[\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-1}+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-2}+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-3}+\ldots+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-n}\right]}_{\text{Serie geométrica de razón } r=\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-1}} \quad [5.3]$$

Basta despejar el valor de n para obtener la respuesta; sin embargo, cuando la variable desconocida es el número de pagos, es necesario recurrir al concepto de series geométricas.[8] La expresión entre corchetes corresponde a una serie de este tipo.

La suma S de los primeros n términos de una serie en progresión geométrica está dada por:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Donde
S: Suma de los primeros n términos de la serie.
a: Primer término de la serie.
r: Razón común.
n: Número de términos de la serie.

$$a = \left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-1}$$

$$r = \left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-1}$$

n = Número de pagos buscado

Sustituyendo la suma de la serie en la ecuación de valor [5.3]:

$$\$25000 = 200\ \frac{\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-1}\left(1-\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-n}\right)}{1-\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-1}}$$

$$\$25000 = \frac{200\ [(0.994200497)\ (1-(1+0.005833)^{-n})]}{0.0057995}$$

Empleando logaritmos se llega a:

$n = 224.5813$ Se deben realizar 224 pagos de \$200 cada uno más 0.5813 pagos (un pago fraccionario por un importe a calcular)

Para conocer el importe del pago final x, se replantea la ecuación [2] con la suposición de que el pago complementario (que corresponde al tiempo 0.5813) se efectúa un mes después del último pago completo:

[8] En todos los demás casos su empleo es opcional.

$$25000 = 200\left[\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-1}+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-2}+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-3}+\ldots+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-224}\right]+x\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-225}$$

Despejando x, se obtiene que $x = \$116$ es el importe del pago fraccionario a efectuarse en el mes número 225.

Ejemplo 9

Calcúlese el importe del último pago del ejercicio anterior, si éste se efectúa en el momento de realizar el último pago regular.

Solución

Como ya se sabe que el número de pagos es $n = 224.5813$, es decir, 224 pagos completos de \$200 cada uno y uno fraccionario, se supondrá que el último pago regular es el número 223, así el último incluye un pago de \$200 más uno fraccionario. En el diagrama siguiente se observa esta situación:

	\$200	200	200	. . .	200	200	200 + x
0 \$25000 FV	1	2	3	. . .	222	223	224 meses (18 años 8 meses)

La ecuación de valor es:

$$25000 = 200\left[\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-1}+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-2}+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-3}+\ldots+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-223}\right]+(200+x)\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-224}$$

$$25000 = 24914.19855 + (200+x)\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-224}$$

$x = \$115.73$ Importe del pago fraccionario a efectuarse en el mes número 224

Por lo tanto, el último pago irregular será de \$315.73.

5.5.2 Tasa de interés desconocida (i)

Es común encontrar situaciones en las que la tasa de interés es la variable desconocida. En los primeros tres capítulos se vio cómo determinar la tasa de interés, sin embargo sólo se relacionaban dos flujos de efectivo. Ahora, cuando se involucran más de dos pagos, la determinación de la tasa de interés requiere de otras técnicas algebraicas. Por ejemplo, en el caso del valor futuro (VF) de una renta unitaria vencida pagadera durante n periodos a la tasa de interés i efectiva por periodo, se tiene un polinomio de grado n en $(1 + i)$:

$$VF = (1 + i)^1 + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^n \qquad [5.4]$$

Si las raíces de este polinomio se pueden determinar algebraicamente, entonces i se obtiene inmediatamente.[9]

Existen varios métodos para resolver numéricamente el polinomio; el método que se empleará en este documento es el de interpolación lineal, el cual se basa en la suposición de que el valor presente (o el valor acumulado —futuro—) de una anualidad y la tasa de interés mantienen una relación lineal (en la sección 5.3 de este capítulo se vio que no es así, véase gráfica 5.1). La exactitud del método depende de qué tan cercanos estén los valores de la curva verdadera.

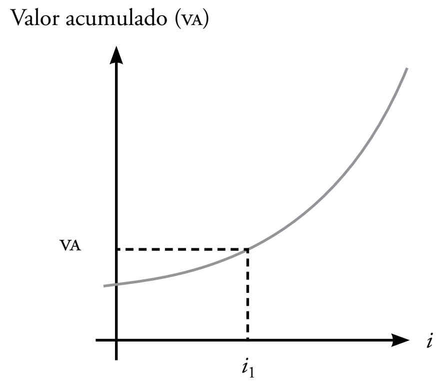
A continuación se explica este método muy recomendado si se dispone de una hoja electrónica de cálculo. Al final del documento se muestra cómo calcular la tasa de interés de una serie de pagos empleando las funciones financieras de Excel de Microsoft.

El método de interpolación lineal para el cálculo de la tasa de interés de una anualidad

Como en el caso de interés compuesto, el crecimiento (o decrecimiento) del capital es exponencial; la gráfica entre la tasa de interés i y el valor acumulado, por ejemplo, es:

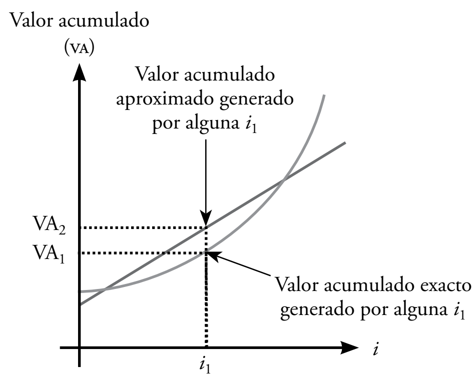
[9] Algunos métodos de aproximaciones sucesivas como el de Newton-Raphson o métodos de expansión de series no se aplican aquí, pero el lector puede consultar Stephen G. Kellison, *The Theory of Interest*, Irwing, Homewood, Illinois, 1991.

Gráfica 5.2
Valor acumulado
de un capital en el interés compuesto



Si se supone linealidad entre la tasa de interés y el valor acumulado, la relación anterior se puede estudiar (o aproximar) a través de una recta; en la gráfica 5.2 puede apreciarse la aproximación de una recta al punto buscado (la tasa de interés) sobre la curva del valor acumulado.

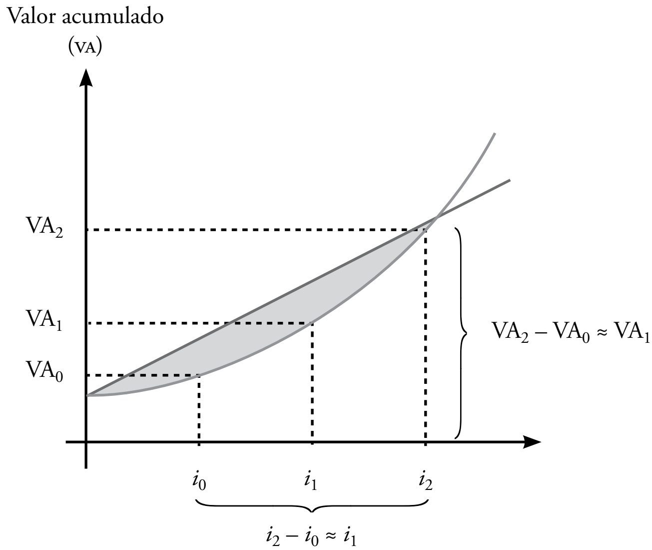
Gráfica 5.3
Aproximación de una recta
a un punto sobre una curva



El área que hay entre la curva y la recta corresponde al margen de error en que se incurre al suponer un comportamiento lineal entre i y, en este caso, el valor acumulado. El valor i_1 es la verdadera tasa de interés que actúa en la operación y es desconocida.

Para reducir este margen de error, se pretende que los valores que acoten a i_1, por ejemplo, i_0 e i_2 (inferior y superiormente, respectivamente), produzcan valores para el valor acumulado, en este caso, muy cercanos al valor acumulado, VA_1 verdadero.

Gráfica 5.4
Margen de error
en la aproximación lineal a una curva



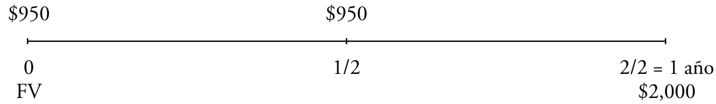
Para que la aproximación sea aceptable, se busca que las diferencias ($VA_2 - VA_0$) sean mínimas y sólo dependan de ($i_2 - i_0$). La exactitud del valor interpolado depende de esa minimización. Para lograr esa reducción, se ensayan repetidamente valores diferentes de i, se sustituyen en la respectiva ecuación del valor acumulado de la anualidad, en este caso, y se compara la diferencia del valor futuro calculado con la tasa de interés supuesta y el valor futuro verdadero.

Ejemplos para el cálculo de la tasa de interés de una serie de pagos

Ejemplo 10

Se desea acumular $2000 durante un año mediante dos depósitos semestrales iguales anticipados de $950 cada uno, ¿cuál es la tasa de interés que debería operar para alcanzar el objetivo?

Se calculará la tasa efectiva i anual; es decir, se ha seleccionado como unidad de tiempo al año:



Por lo tanto, la ecuación de valor que vincula ambas obligaciones en el momento 0 es:

$$\$950 + \$950\,(1 + i)^{-\frac{1}{2}} = \$2000\,(1 + \mathrm{i})^{-1} \qquad [5.5]$$

$$\$950\,[1 + (1 + i)^{-\frac{1}{2}}] = 2000\,(1 + \mathrm{i})^{-1}$$

$$(1 + i) + (1 + i)^{\frac{1}{2}} = 2.1052 \qquad [5.6]$$

Para encontrar el valor de i, la tasa de interés que logrará acumular $2000 en las condiciones descritas, se empleará un método de aproximación sucesiva basado en la suposición de que existe una relación lineal entre la tasa de interés y los flujos de efectivo.

De acuerdo con la ecuación [5.6] se elige arbitrariamente un valor para la tasa de interés i, este valor se sustituye en dicha ecuación; a partir del valor obtenido con la sustitución, se supondrá otra tasa de interés i de tal forma que al sustituirse también en la ecuación [5.6], el valor nuevo obtenido y el valor anterior acoten superior e inferiormente al valor 2.1052. Entre más pequeña sea esta acotación, la aproximación para el valor de i será mejor.

A continuación se muestra lo aquí expresado:

Supóngase $i = 0.06$
$\Rightarrow$ sustituyendo en [5.6]

$$(1 + 0.06) + (1 + 0.06)^{\frac{1}{2}} = 2.0896$$

Supóngase $i = 0.07$
$\Rightarrow$ sustituyendo en [5.6]

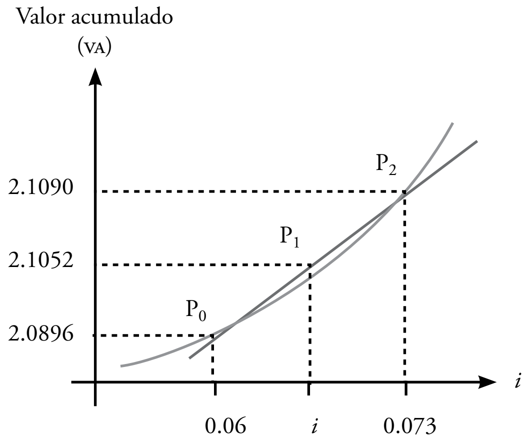
$$(1 + 0.073) + (1 + 0.073)^{\frac{1}{2}} = 2.1090$$

Los valores obtenidos acotan inferior y superiormente a 2.1052.

Obsérvese que la diferencia (2.1090 – 2.0896) es pequeña: 0.0194. En general esta diferencia debe ser mínima para asegurar una buena aproximación al valor de i buscado.

Para encontrar ese valor de i, se supone que los valores encontrados anteriormente están sobre una línea recta y acotan al valor i, que también se supone está sobre la misma recta; véase gráfica 5.4.

Gráfica 5.5
Interpolación lineal para calcular la tasa de interés del ejemplo 10



Como la pendiente, m, de una recta es la misma a lo largo de ella, se pueden calcular 2 pendientes a partir de 2 puntos cualesquiera de los 3 que están en la recta anterior, tal que una pendiente se calcule con el punto que contiene como abscisa al valor i buscado.

Supóngase que se seleccionan los puntos P_0 y P_1 para una pendiente, m_1, y los puntos P_1 y P_2 para la segunda pendiente, m_2.

Se sabe que $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2.0896 - 2.1052}{0.06 - i} = \frac{2.0896 - 2.1090}{0.06 - 0.073} \qquad [5.7]$$

despejando el valor de i de la expresión [5.7]

$$i = 0.07045.$$

Por lo tanto, la tasa de interés que acumula $2000 después de un año mediante depósitos semestrales anticipados fijos de $950 es de 7.045% efectiva anual.

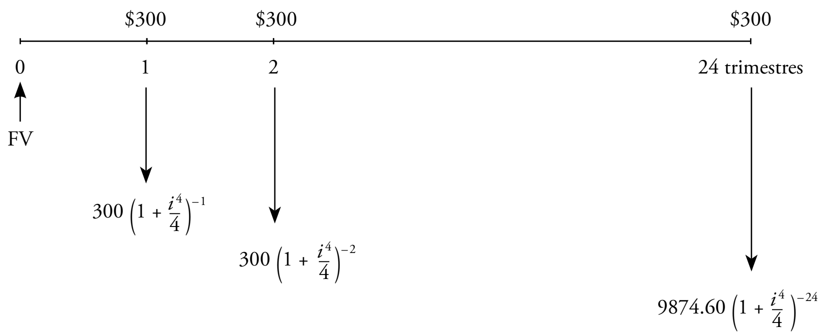
Basta sustituir este valor en la expresión [5.5] o [5.6] para verificar que la tasa de interés encontrada por interpolación lineal es una buena aproximación a la verdadera tasa de interés involucrada en la operación, el error es de casi 12 diezmilésimos.

Ejemplo 11

Se colocan \$300 al final de cada 3 meses durante 6 años en un fondo mutuo de inversión: al final de 6 años se adquieren acciones valuadas en \$9,874.60. ¿Qué tasa nominal convertible trimestralmente ganó la inversión?

Solución

Sea $i^{\frac{360}{90}}$ la tasa anual capitalizable trimestralmente buscada; por facilidad de escritura se expresará como i^4 de tal manera que la tasa efectiva i por trimestre es $\frac{i^4}{4}$. Los flujos de efectivo se representan en el siguiente diagrama:



La ecuación de valor que vincula las obligaciones es:

$$9874.60\left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-24} = 300\left[\left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-1} + \left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-2} + \ldots + \left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-24}\right]$$

Simplificando:

$$9874.60 = 300\left[\left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-1} + \left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-2} + \ldots + \left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-24}\right]\left[\left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{24}\right]$$

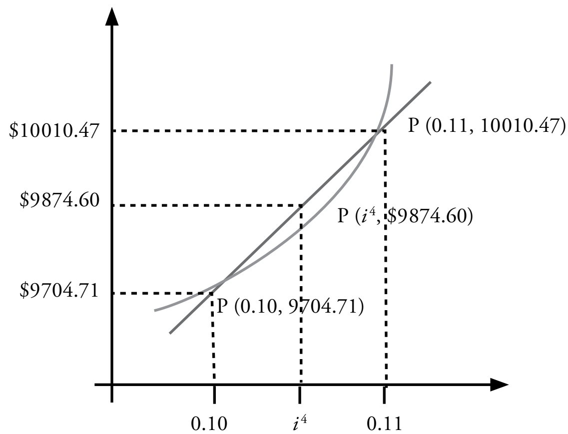
Si se reduce la serie geométrica de la expresión anterior con la suma de una serie en progresión geométrica (véase expresión [5.1]) de la columna sombreada, tenemos:

$$9874.60 = 300\left[\frac{\left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-1}\left[1-\left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-24}\right]}{1-\left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{-1}}\right]\left(1+\frac{i^4}{4}\right)^{24}$$

Esta expresión se interpreta como el valor futuro de la serie de depósitos. Por ensayo y error se obtienen los siguientes valores:

i^4	*Valor futuro*
0.10	9704.71
i^4	9874.60
0.11	10010.47

Gráfica 5.6
Interpolación lineal para calcular la tasa de interés del ejemplo 11



Igualando dos pendientes de la misma recta (véase gráfica 5.5), tenemos:

$$\frac{10010.47 - 9704.71}{0.11 - 0.10} = \frac{9874.6 - 9704.71}{i - 0.010}$$

$$i = 10.56\%$$

Por lo tanto, la tasa nominal capitalizable trimestralmente es de 10.56%, la cual permitirá comprar acciones por un valor de $9874.60 dentro de 6 años si se depositan rentas vencidas de $300 trimestralmente durante 6 años.

Para facilitar los cálculos se sugiere emplear para la interpolación lineal una tasa efectiva por periodo de pago de la renta; véase la solución bajo este enfoque en el anexo.

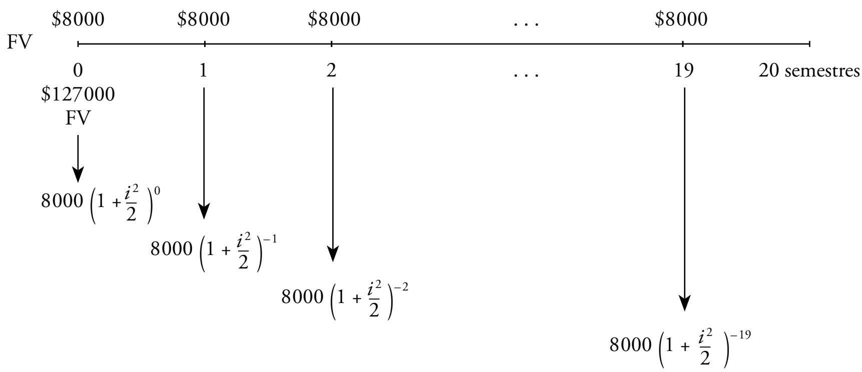
Ejemplo 12

Una deuda de $127000 se liquidará mediante pagos de $8000 semestrales a efectuarse en forma anticipada durante 10 años, ¿cuál es la tasa de interés contratada?

Solución

La tasa de interés buscada puede expresarse con cualquier unidad de tiempo, por ejemplo el año, el mes o el bimestre, entre otros. Se recomienda expresarla como anual capitalizable por periodo de la renta, es decir, una tasa efectiva *i* por semestre. La fecha de valuación seleccionada será el momento presente:

$$i = \frac{i^{\frac{360}{180}}}{\frac{360}{180}} \;;\; i = \frac{i^2}{2} \text{ tasa efectiva semestral}$$



$$127000 = 8000\left[1 + \left(1 + \frac{i^2}{2}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{i^2}{2}\right)^{-2} + \ldots + \left(1 + \frac{i^2}{2}\right)^{-19}\right] \qquad [5.9]$$

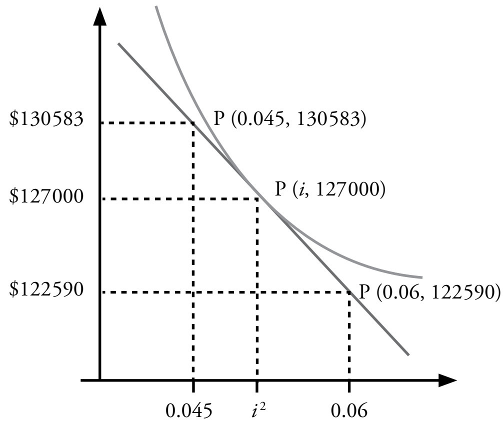
Si se reduce la expresión anterior con la suma de la serie, se tiene:

$$127000 = 8000\left[\frac{1\left[1 - \left(1 + \frac{i^2}{2}\right)^{-20}\right]}{1 - \left(1 + \frac{i^2}{2}\right)^{-1}}\right]$$

Por ensayo y error se obtienen los siguientes valores:

i^4	*Valor actual (deuda)*
0.045	130583.167
i	127000
0.06	122590.393

Gráfica 5.7
Interpolación lineal para calcular la tasa de interés del ejemplo 12



Igualando dos pendientes de la misma recta, tenemos:

$$\frac{127000 - 130583.167}{i - 0.045} = \frac{122590.393 - 130583.167}{0.06 - 0.045}$$

$$i^2 = 5.1725\%$$

Por lo tanto, la tasa de interés que permite cancelar la deuda de \$127000 mediante 20 depósitos semestrales es de 5.17% nominal capitalizable semestralmente.

La tasa efectiva semestral i se calculará de la siguiente manera:

$$\frac{i^2}{2} = i$$

$$\frac{0.051725}{2} = 0.02586$$

Si se sustituye i^2 en la expresión [5.9] o [5.10] se obtiene un valor presente de \$126905.

Para aproximar este valor al verdadero, \$127000, se sugiere acotar más a la tasa nominal i^2, de tal manera que el intervalo

$$0.045 < i^2 < 0.06$$

sea más reducido; es decir, que la diferencia (0.06 – 0.045) tienda a 0.

El acreedor tiene la seguridad de que recuperará su capital, junto con los intereses.

Anualidades contingentes: La serie de pagos no es cierta porque dependen de la realización de un hecho fortuito, por ejemplo, pagos que se realizan si ocurre o no un evento contingente, tal como la enfermedad, la invalidez, la jubilación etc.; es decir, en ellas interviene la probabilidad para que se mantenga una condición preestablecida para mantener el flujo de pagos; en general se les conoce como *pensiones*; para su valuación se emplea la estadística y la probabilidad. Si los pagos se realizan mientras no hay agotamiento de recursos naturales, la anualidad recibe el nombre de *perpetuidad;* la serie de pagos se realiza indefinidamente, sin límite de tiempo.

5.2.2 Atendiendo al momento en que se pagan las rentas

Anualidades anticipadas: Si la serie de pagos o rentas se efectúan al inicio de los periodos de pago.

Anualidades vencidas: Si la serie de pagos o rentas se efectúan al final de los periodos de pago.

Anualidades diferidas: Puede considerarse un caso particular de la serie de pagos vencida: cuando la primera renta se efectúa algunos periodos después de que se formaliza la operación y no desde un principio. Una *anualidad diferida* es aquella cuyo plazo comienza hasta después de transcurrido un cierto intervalo de tiempo desde el mo-

Sucesiones y series en progresión geométrica

Se presenta este apartado porque en algunos casos de anualidades se deben emplear estos conceptos; aunque se aplican preferentemente al importe de los pagos de una serie. En este texto se aplicarán para calcular el valor de series de pago de $1 (*ventas unitarias*); véase en el cuadro 5.1 tales valores.

Sucesiones
Una *sucesión* es un conjunto de elementos en correspondencia biunívoca con el conjunto de enteros positivos, en cuyo caso se llama *sucesión infinita*, o con un subconjunto, S_n, {1,2,3,4,.....n} de los enteros positivos para algún entero positivo n, en cuyo caso se llama *sucesión finita*.
Los elementos de la sucesión se llaman *términos* y se denotan por a_i.
Términos a_i de una sucesión:

Infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

Finita $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

El tipo de sucesiones que aparecen en la teoría del interés son las que tienen un comportamiento predecible; es decir, los incrementos (o decrementos) entre términos consecutivos de la sucesión son constantes a lo largo de ella y se comportan en progresión aritmética o geométrica. Este tipo de sucesiones se asocian al comportamiento observado en el desarrollo de anualidades.
Una *sucesión finita en progresión geométrica* es aquella en la que cada término, después del primero, es el producto de una constante (llamada *razón común*) por el término precedente.

Sea: a primer término de la sucesión en progresión geométrica.
r razón común de la sucesión en progresión geométrica.
n número de términos de la sucesión en progresión geométrica.

Posición del término *n*-ésimo de una sucesión en progresión geométrica

1er. término	2o. término	3er. término	4o. término	...	*n*-ésimo
t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_n
a	$a \cdot r$	$a \cdot r^2$	$a \cdot r^3$	...	$a \cdot r^{n-1}$

El listado de una sucesión finita en progresión geométrica se expresa:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3\ \ldots\ ar^{n-1}$$

Ejercicios propuestos

1. Una máquina se vende a plazos, con una cuota inicial de \$3,000 y el saldo en 12 pagos mensuales de \$1,500 cada uno, cargando 16% de interés convertible mensualmente. Calcular el precio de contado de la máquina: a) suponga que los pagos son anticipados, b) suponga que los pagos son vencidos.
   Sol.: a) \$17,752.85, b) \$19,532.41.
2. El beneficiario de un seguro recibe de parte de la compañía dos ofertas: a) \$100,000 de contado, b) una anualidad de \$11,000 por un año durante 12 años. Diga cuál es la mejor oferta, y encuentre la diferencia si el interés al cual se puede invertir el dinero es de 8% anual.
   Sol.: Conviene recibir de inmediato \$100,000. La diferencia es de \$17,103.14.
3. Un auto cuyo valor es de \$250,000.00 se adquiere con un financiamiento que consiste en:

   Enganche: 35% del precio de contado.
   Plazo: 60 meses.
   Tasa: 25% anual pagadera mensualmente.

   ¿Cuál es el importe del pago mensual vencido?
   Sol.: \$4,769.59.
4. Un préstamo de \$100,000 debe extinguirse mediante pagos mensuales de \$5000 durante los primeros 10 meses y por pagos de \$10,500 hasta que sea necesario. Encontrar la duración del préstamo, si la tasa de interés es de 3.5% efectiva anual. Sol.: 16 meses aproximadamente: 15 pagos completos de \$10,500 más un pago complementario.
5. ¿De cuánto es el crédito que se cancela con 10 rentas trimestrales vencidas de \$8,500 si se cobra una tasa de interés de 28% nominal capitalizable bimestral-mente y la primera renta se realiza 4 meses después de la fecha inicial?
   Sol.: \$58,136.38.
6. Calcular el tiempo necesario para que \$35,000 se conviertan en \$40,200 al 9.56% anual capitalizable trimestralmente.
   Sol.: 5.86 trimestres.
7. Encontrar el valor presente para el 1 de enero de 2000 de los pagos de \$ 200 que se efectuarán cada 6 meses, y de \$100 desde el 1 de julio de 2004 hasta el 1 de enero de 2010 inclusive. La tasa de interés es de 6% capitalizable semestralmente.
   Sol.: \$2,189.72.
8. Una deuda se extinguirá mediante pagos de \$20,000 que se efectuarán cada seis meses desde el 1 de marzo de 2005 hasta el 1 de marzo de 2007 inclusive, y \$10,000 cada 6 meses desde el 1 de junio de 2007 hasta el 1 de diciembre de ese

año; la tasa de interés es de 8% para Cetes a 91 días. Se desea sustituir esa deuda por un pago único del día de hoy, ¿cuál es la cantidad que cancelará esa deuda?
Sol.: $89,010.60

9. Al inicio de cada trimestre se invierten $400 a la tasa de 6% efectiva anual, ¿cuál es el monto de la inversión al final de 5 años?
Sol.: $9,355.11.
10. Se desea efectuar retiros mensuales de $4,000 cada uno mediante la inversión de $50000 al 14% anual convertible mensualmente; el primer retiro se realiza dentro de un mes, ¿durante cuánto tiempo se podrán hacer retiros completos por esa cantidad?, ¿de cuánto sería el pago complementario a efectuarse un mes después del último retiro completo?
Sol.: 13 retiros completos de $4,000 cada uno y un pago complementario por $2,364.46
11. El precio de contado de un automóvil nuevo es de $220,000 y se desea adquirirlo mediante un enganche de $20,000, 23 pagos de $8,000 mensuales y un pago número 24 que saldaría la deuda; si la tasa de interés que se cobra por el crédito es de 18% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál sería el importe de ese último pago?
Sol.: $64,832.48.
12. Para la adquisición del automóvil del ejercicio anterior, existe una alternativa de financiamiento: un enganche de 50% y 5 pagos mensuales vencidos fijos con tasa variable de la siguiente manera: 18% anual capitalizable mensualmente durante los primeros 2 meses y 10 puntos porcentuales adicionales por el tiempo restante: a) ¿cuál es el importe del pago mensual?, b) ¿cuál es el importe de los intereses pagados por el crédito durante los dos primeros meses?
Sol.: a) $23,444.31, b) $2,974.75.
13. Para saldar una deuda de medio millón de pesos se efectúan pagos mensuales vencidos de $15,000. El acreedor cobra una tasa de 10% anual capitalizable mensualmente: determinar: a) ¿cuántos pagos se deberán realizar para cancelar la deuda? y b) ¿cuál sería el importe del pago complementario efectuado el último pago de $15,000?
Sol.: a) 39 pagos, b) $3,208.06.
14. Para extinguir una deuda de $300,000 se tienen las siguientes opciones: a) un pago inmediato de $150,000 y pagos semestrales iguales a tasa fija en un plazo de 2 años a la tasa de 25% que corresponde a Cetes a 28 días; b) un pago inmediato de $150,000, pagos fijos iguales trimestrales a un plazo de un año y un pago de $50,000 dentro de 6 meses; la tasa de interés es la misma. ¿Cuál sería el importe del pago periódico en cada caso?
Sol.: a) $50,616.18, b) $30,809.83.

15. Se otorga un crédito por $400,000 en 12 meses mediante rentas iguales; el primer pago debe realizarse al final del cuarto mes y la tasa de interés es de 30% nominal capitalizable mensualmente, ¿cuál es el importe del pago periódico?
    Sol.: $41,993.19.
16. Una persona realizó las siguientes compras: hace siete meses, $5,000 a un tasa efectiva de 10% anual para pagar hoy; hace cuatro meses, $1000 a una tasa nominal de 8% capitalizable mensualmente para pagar hoy. Hace un mes, $2,500 a una tasa simple de 18% para pagar hoy. El vendedor acepta invertir estos adeudos en 2 nuevos pagarés a 2 y 9 meses a partir del día de hoy con una tasa de interés nominal capitalizable trimestralmente de 21%, ¿qué importe debe pagar en el último pagaré si el primero a pagar en 2 meses debe ser por la mitad del segundo pagaré?
    Sol.: a) primer pago $3,300.06, b) segundo pago, $6,600.12.
17. Un banco ofrece prestar $100,000 a sus clientes distinguidos a una tasa preferencial de 1.08% mensual. La cantidad solicitada se pagará en 5 mensualidades fijas, ¿cuál será el importe de cada pago mensual?
    Sol.: $20,652.64.
18. Se adquiere maquinaria nueva por 6.5 millones de pesos mediante un pago de contado de $150,000 y el resto en pagos mensuales durante 5 años. El financiamiento se pacta a tasa variable de 8% anual convertible mensualmente durante los primeros 2 años y de 9% convertible mensualmente durante el tiempo restan-te, ¿cuál es el importe de los pagos mensuales?
    Sol.: $129,798.52
19. Se desea acumular un fondo durante 12 meses mediante pagos mensuales vencidos fijos de $10,000 para tener derecho a retirar $8,000 mensuales fijos hasta agotar el fondo. Si el primer retiro se efectúa un mes después del último depósito y la tasa de interés que opera en la transacción es de 12% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál sería el número de retiros a efectuarse?
    Sol.: 17 retiros mensuales de $8,000 más un retiro complementario.
20. ¿Cuántos depósitos anticipados mensuales fijos deberán efectuarse para acumular $850,000 a la tasa de 18% nominal capitalizable trimestralmente, si el pago mensual es de $52,000?
    Sol.: 14 depósitos mensuales más uno complementario.
21. Una persona desea un préstamo por el cual puede pagar $6,000 mensuales durante 2 años efectuando el primer pago dentro de 6 meses. Si la tasa de interés es de 7% anual convertible mensualmente, ¿cuánto se le puede prestar?
    Sol.: $130,169.435.
22. Se desea acumular $10,000 al final de un año mediante 2 depósitos de $4,800 cada uno. El primero a efectuarse hoy y el segundo 4.5 meses después, ¿cuál es la

tasa nominal pagadera mensualmente que debe pagar el banco para que el inversionista alcance su objetivo?
Sol.: 5.02% anual capitalizable mensualmente, aproximadamente

23. Un préstamo de $10,000 a una tasa de interés de 3.5% efectivo anual se liquida mediante un pago de $2,500 al término de 4 meses, seguido de 6 pagos mensuales iguales, ¿cuál es el importe del pago periódico?
Sol.: $1,282.01.
24. Un préstamo por $500,000 se devolverá mediante 7 pagos semestrales anticipados por $80,000 cada uno, ¿cuál es la tasa de interés anual capitalizable semestralmente que se paga por la deuda?
Sol.: 7.90796%.
25. ¿Durante cuánto tiempo se tendrán que hacer pagos fijos vencidos mensuales de $5,000 para liquidar el financiamiento de un automóvil con valor de $250,000 y un enganche de 20% sobre el precio de contado? La tasa del financiamiento es de 14% anual capitalizable mensualmente.
Sol.: 54 pagos completos de $5,000 y un pago complementario.
26. ¿Cuál es la tasa nominal capitalizable trimestralmente que acumula $19,500 durante 5 años mediante depósitos trimestrales de $800 cada uno?
Sol.: 8.1280% anual capitalizable trimestralmente.
27. Se adquiere un automóvil con valor de $145000; se aporta 20% de su valor y el resto es financiado mediante pagos mensuales fijos vencidos de $4250 durante 3 años, ¿cuál es la tasa de interés anual capitalizable mensualmente del financia-miento?
Sol.: 18.96%.
28. ¿Cuál es la tasa nominal capitalizable trimestralmente que acumula $72,250 durante 3 años mediante depósitos mensuales de $1,500?
Sol.: 19.496% anual capitalizable trimestralmente.
29. ¿Cuántos pagos mensuales de $3,780 cada uno, efectuados a partir de hoy, y qué pago complementario serán necesarios para acumular $25200, si el dinero gana un interés de 60% capitalizable mensualmente?
Sol.: 5 pagos mensuales de $3,780 y uno complementario de $3,268.77 a efectuarse en el sexto mes.
30. ¿Durante cuánto tiempo se deben depositar $5,000 quincenales para tener derecho a retirar 12 pagos mensuales de $3,000 vencidos fijos, si el primer retiro se efectúa 6 meses después del último depósito? La tasa de interés pagada durante toda la operación es de 17% anual capitalizable quincenalmente.
Sol.: 6 depósitos completos de $5,000 y un depósito complementario de aproximadamente $60.

31. Un préstamo por $100,000 se devolverá mediante 6 pagos trimestrales anticipados de $17,000 cada uno, ¿cuál es la tasa de interés anual convertible trimestralmente?
    Sol.: 3.195%.
32. ¿Qué tasa nominal convertible mensualmente debe pagar un bono para acumular $50,000 durante 2 años mediante depósitos semestrales anticipados de $12,000 cada uno?
    Sol.: 3.2569% nominal capitalizable mensualmente.

Conviene recordar

1. El termino *anualidad* no se refiere únicamente a serie de pagos anuales; éstos pueden efectuarse con cualquier otra periodicidad.

2. El periodo de pago unitario (cuando se involucran series de pagos) se refiere al periodo de pago de la renta R.

3. Para efectos de planteamiento y cálculo no es necesario que el periodo de pago de la renta coincida con el periodo de pago de la tasa de interés.

4. Si se desea emplear calculadora financiera o las funciones financieras de Excel, sí es necesario que el periodo de pago de la renta coincida con el periodo de pago de la tasa de interés; es decir, se emplean sólo tasas efectivas por periodo de pago de la renta.

5. Las rentas o anualidades unitarias se refieren a series de pagos de \$1. Los valores presente y futuro de estas series son punto central de atención porque si se dispusiera de ellos a diferentes tasas de interés, bastaría multiplicarlos por la renta R para calcular el valor presente o futuro de la serie, por ejemplo.

6. No es necesario emplear la suma S_n de los primeros n términos de una serie en progresión geométrica, aunque si se emplea, se facilita el cálculo. Sólo es necesario para encontrar el número n de pagos de la anualidad.

7. Los valores presente o futuro de una anualidad cambian según se realice el pago al principio o al final de cada periodo de pago.

Fórmulas financieras

En las expresiones siguientes la tasa de interés i es efectiva por periodo de pago de la renta

Básica
para reducir las series

$$\text{Si} \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Suma de los primeros n términos de una serie en progresión geométrica

Valor presente (VP) de una anualidad unitaria vencida

$$VP = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n}$$

Si se reduce esta serie a un número con la expresión S_n

$$VP = (1+i)^{-1}\left[\frac{1-[(1+i)^{-1}]^n}{1-(1+i)^{-1}}\right]$$

$$= (1+i)^{-1}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}\right]$$

$$= (1+i)^{-1}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{(1+i)-1}{(1+i)}}\right]$$

Básica

$$\therefore \quad VP = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Formulas Financieras.

Valor Futuro (VF) de una anualidad unitaria vencida.

$VF=1(1+i)^1+(1+i)^2+(1+i)^3+\cdots+(1+i)^{(n-1)}$

Si se reduce esta serie a un número con la expresión S_n

$VF=1\left[\frac{1+(1+i)^n}{1-(1+i)^1}\right]$

Básica

$$VF=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Valor presente de una anualidad unitaria anticipada.

Valor futuro (VF)P de una anualidad unitaria anticipada.

$VF=F+(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+\cdots+(1+i)^{-(n-1)}$

Se reduce esta serie a un número con la expresión S_n

$$VF=1\left[\frac{1-[(1+i)^{-1}]^n}{1-(1+i)^{-1}}\right]$$

$$=\frac{(I+i)}{(I+i)}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{(1+i)-1}{(1+i)}}\right]$$

Básica

$$VF=(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Formulas Financieras.

Valor futuro

(VF) de una actualidad unitaria anticipada.

$VF=(1+i)^1+(1+i)^2+(1+i)^3+\cdots+(1+i)^n$

Si se reduce esta serie a un número con la expresión S_n

$VF=(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}\right]$

Básica

$$VF=(1+i)\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

tienen un importe R

$VP=\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$ Vencida

$VF=R\ \left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ Vencida

$VP=R(1+i)\ \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$Anticipada

$VF=R(1+i)\ \left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$Anticipada

Nota: se sugiere solo recordar la expresión S_n que reduce una serie geométrica; se emplea indirectamente si las anualidades son vencidas o anticipadas y sin importar que la tasa de interés sea efectiva por periodo de pago de la renta; esto no ocurre con las llamadas formulas financieras "basicas" que aparecen en los recuadros blancos.

Capítulo 6
Amortización

Introducción

El objetivo de este capítulo es calcular, analizar e interpretar el comportamiento de deudas de largo plazo al extinguirse gradualmente en el tiempo. Se explicará cómo se extingue una deuda a partir de abonos a capital y pagos de intereses y se elaborará una tabla llamada *de amortización*.[1] Este es un procedimiento con el cual se extingue un crédito mediante pagos o rentas generalmente iguales que incluyen una parte del capital prestado y una parte de los intereses convenidos.

En una operación de crédito tanto el prestamista como el prestatario están interesados en conocer en cualquier punto en el tiempo el estado que guarda la deuda; surgen así varias preguntas: si se pagara cierta cantidad durante 30 años, por ejemplo, ¿cuánto se pagará realmente por la deuda al final del plazo?; si se desea liquidar la deuda después de haber efectuado cierto número de pagos, ¿cuál sería el importe del pago único? Este pago único que cancela la deuda a una cierta fecha es el capital que se adeuda después de realizar el pago correspondiente a ese momento, es decir, se trata del *capital insoluto*.[2]

Asimismo estarían interesados en conocer cuánto se ha pagado del capital prestado, cuánto de intereses y cuál es la composición de cada pago en lo que se refiere a capital e interés pagado en cualquier momento. La separación de capital e intereses en el importe del pago periódico también proporciona información valiosa para las partes involucradas en el préstamo p ara propósitos fiscales.

El instrumento empleado por las matemáticas financieras para mostrar la división de cada pago en capital e intereses es la *tabla de amortización*; con ella se registra además el capital insoluto en cualquier punto en el tiempo.

[1] La palabra *amortización* proviene del latín *mors*, *mortis* que significa "muerte", es decir, "extinción".

[2] En otras palabras, es el capital que se adeuda al principio de cada periodo de pago.

El enfoque empleado para calcular el *capital insoluto* será el *prospectivo*; éste calcula el capital insoluto en el momento t como el valor presente, a esa fecha, de los pagos que están por realizarse.[3]

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Importe de la deuda}\\ \text{(Capital insoluto)}\end{array}} = \boxed{\text{Valor presente de los pagos}} \qquad [6.1]$$

A menudo la variable desconocida en una operación de crédito es el importe del pago periódico o renta, éste puede calcularse porque se conoce el importe del capital prestado —también llamado *principal*—, el número de pagos y la tasa de interés. A partir de la determinación de la renta R con el método prospectivo, puede construirse la tabla de amortización; en ella aparecen las siguientes variables: capital insoluto al principio de cada periodo de pago, interés contenido en el pago, capital contenido en el pago, y total de capital pagado.

6.1 Cálculo de la renta o pago periódico

Las siguientes son las suposiciones para la construcción de una tabla de amortización:

i) La frecuencia de pagos se efectúa a intervalos regulares de tiempo (pagos mensuales, semestrales, etcétera).
ii) El importe del pago (o renta) es fijo e igual en cada periodo de pago.
iii) La tasa de interés es fija.
iv) El pago periódico (o renta) contiene una parte del capital prestado y una parte de interés.
v) Los intereses devengados se calculan sobre saldos insolutos.

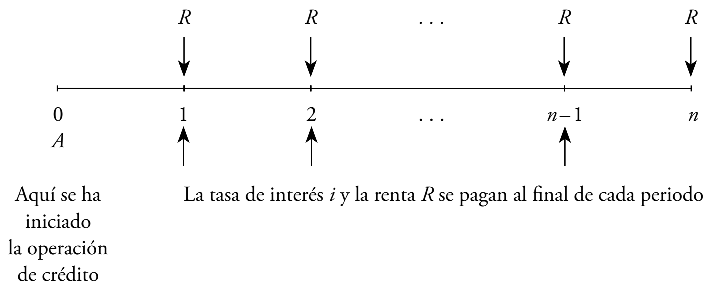
Notación empleada en este capítulo:

Sea: A: El importe del capital prestado llamado *capital* o *principal*.
R: El importe del pago periódico o renta (incluye capital e intereses).
i: La tasa de interés efectiva por periodo de pago de la renta.
n: El número de periodos durante los cuales se efectúan los pagos R (también se le llama *plazo de la operación*).

[3] Existe otro enfoque, el *retrospectivo*, que considera al capital insoluto en el momento t como igual al valor acumulado de la deuda original (capital prestado) en el momento t menos el valor acumulado, a esa misma fecha, de todos los pagos realizados hasta ese momento; como ambos enfoques son equivalentes, no se verá el retrospectivo en el documento.

El capital prestado o principal junto con los pagos que lo liquidarán se ubican en el siguiente diagrama:

Figura 6.1

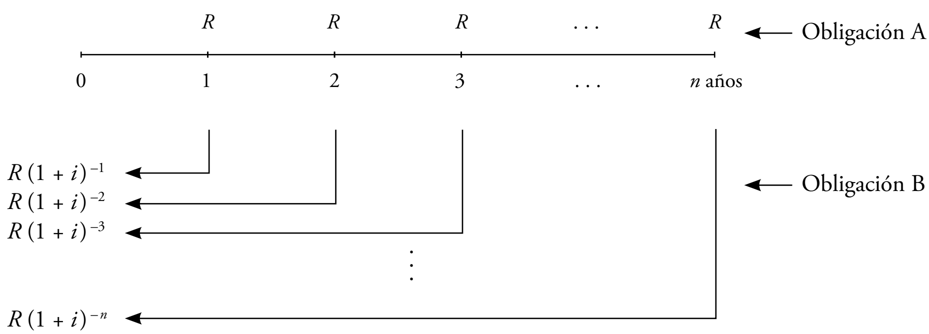


Cabe hacer notar que el diagrama ilustra el caso de anualidades ciertas vencidas: los pagos se efectúan al final de cada periodo de pago.

Seguir el enfoque *prospectivo* en la expresión [6.1] para establecer la ecuación de valor que vincule ambas series de obligaciones, implica descontar cada uno de los pagos R a la tasa i durante el tiempo que les corresponda (véase figura 6.2).

La figura siguiente muestra la ubicación de las obligaciones en el tiempo:

Figura 6.2



∴ La ecuación de valor es:

$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots + R(1+i)^{-n}$$

$$A = R[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n}] \qquad [6.2]$$

Debe señalarse que la figura 6.2 corresponde al valor presente de una serie de pagos vencidos. (Véase el cuadro 5.1 del capítulo 5.)

La expresión [6.2] es una serie en progresión geométrica de razón $(1 + i)^{-1}$ con n términos por lo que su suma S_n está dada por:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

donde: *a:* Primer término de la serie en progresión geométrica.
r: Razón común de la serie.
n: Número de términos de la serie.

En la expresión anterior se observa que:

$$a = (1 + i)^{-1}$$
$$r = (1 + i)^{-1}$$
$$n = n$$

al aplicar este resultado a la ecuación de valor [6.2] se tiene:

$$A = R(1 + i)^{-1}\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{1 - (1 + i)^{-1}}\right] \qquad [6.3]$$

Mediante unos sencillos pasos algebraicos se llega a:

$$A = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right] \qquad [6.4]$$

Esta expresión relaciona el capital principal (o capital prestado A) con el valor presente de todas las rentas a efectuarse durante n periodos a la tasa de interés i efectiva por periodo.

Con ello pueden contestarse preguntas frecuentes cuando se contratan deudas a largo plazo; por ejemplo, si se dispone de cierta cantidad mensual para pagar una deuda durante 30 años y se paga una tasa de interés específica, ¿cuál es la cantidad total que se puede pedir hoy en préstamo? O bien, si se conociera el importe de la deuda y la tasa de interés, ¿cuál sería el importe del pago periódico? Asimismo podría conocerse el importe de la deuda, la tasa de interés y el pago periódico que se estaría en posibilidades de realizar; ¿cuál sería entonces el plazo de la operación? Finalmente, se podría preguntar qué tasa de interés se paga por un cierto crédito convenido a cierto plazo y con determinado pago periódico.

Todas estas preguntas pueden contestarse empleando la ecuación [6.4] al despejar la variable requerida. A continuación se presenta la expresión resultante para calcular el importe del pago necesario para saldar una deuda A mediante n pagos periódicos fijos R a una tasa de interés i efectiva por periodo:

$$R = \left[\frac{A}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \right] \qquad [6.5]$$

La expresión anterior revela la fuerte influencia de la tasa de interés en el pago periódico de un crédito: si aquélla aumenta, el importe del pago periódico aumenta; en la expresión [6.4] puede observarse que sigue existiendo una relación inversa entre la tasa de interés y el valor presente (principal o capital prestado).

De ahí la recomendación para el deudor, ante un drástico aumento de la tasa de interés, de cancelar la deuda mediante el pago del capital insoluto si sus recursos se lo permiten.[4]

6.2 Cálculo de la tabla de amortización

Una vez calculada la renta R —recuérdese que se está suponiendo que es fija por todo el plazo de la operación, es decir, se calcula una sola vez—, puede calcularse el importe de los intereses contenidos en el pago, el importe del capital contenido en el pago, el total de capital pagado y el capital insoluto al principio del periodo, en ese orden.

La metodología que a continuación se presenta para calcular estos valores considera disponer de una hoja electrónica de cálculo; se optó por ella debido a que la metodología tradicional, que emplea expresiones reducidas con series geométricas para el valor presente del capital insoluto al final de cada periodo de pago, resulta impracticable para los objetivos del presente documento.

6.2.1 Cálculo de los intereses contenidos en el pago (I_t)

Una vez obtenido el pago o renta R, los intereses I_t contenidos en el pago se obtienen al aplicar la tasa de interés efectiva por periodo de pago de la renta al capital insoluto al principio del periodo t:

[4] Las expresiones [6.4] y [6.5] se las identifica como *clásicas* para las anualidades vencidas y por ello se presentan aquí; no obstante, se puede emplear directamente la ecuación [6.2] si se deseara calcular cualquiera de las variables A, R o i, no así cuando la variable desconocida es n, aquí debe emplearse la expresión [6.4] o [6.5].

Sea A_t~ el importe del capital insoluto al principio del periodo *t:*[5]

$$I_t = iA_t \quad \text{para } t = 1, 2, ..., n$$

Recuérdese que los intereses se pagan al final de cada periodo.

6.2.2 Cálculo del capital contenido en el pago (ccp)

El importe del pago a capital al final del periodo *t* se obtiene al descontar de la renta *R* los intereses correspondientes:

$$ccp_t = R - I_t \quad \text{para } t = 1, 2, ..., n$$

6.2.3 Cálculo del total de capital pagado (CP)

El importe del capital pagado hasta el momento *t* se obtiene sumando cada uno de los importes del capital contenido en el pago, es decir, representa el total de capital amortizado:

$$CP_t = \sum_{j=1}^{t} ccp_j \quad \text{para } j = 1, 2, ..., n$$

6.2.4 Cálculo del capital insoluto al principio del periodo (A_t)

El capital insoluto ubicado al principio de cada periodo de pago, por definición, se obtiene al restar al capital insoluto del periodo inmediato anterior, el importe del capital contenido en el pago en el punto *t*:

$$A_t = A_{t-1} - ccp_t \quad \text{para } t = 1, 2, ..., n$$

Como previamente se ha calculado el importe del pago *R*, según la expresión [6.5], la tabla de amortización quedaría como sigue:

[5] Obsérvese que A_1 corresponde al principal o capital prestado (llamado hasta ahora *A*).

Cuadro 6.1
Cálculos para elaborar una tabla de amortización

	Deuda	Distribución del pago		
Pago (final del periodo *t*)	**Capital insoluto al principio del periodo**	**Interés contenido en el pago**	**Capital contenido en el pago**	**Total de capital pagado**
1	A_1 [6]	$I_1 = iA_1$	$ccp_1 = R - iA_1$	$ccp_1 = R - iA_1$
2	$A_2 = A_1 - ccp_1$	$I_2 = iA_2$	$ccp_2 = R - iA_2$	$ccp_1 + ccp_2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$A_n = A_{n-1} - ccp_{n-1}$	$I_n = iA_n$	$ccp_n = R - iA_n$	$ccp_1 + ccp_2 + \ldots + ccp_n$

El último valor, el n-ésimo, del total del capital pagado debe coincidir con el importe del préstamo original A; el total de intereses pagados por el crédito se obtiene al sumar la columna de intereses.

Para ilustrar el proceso de amortización, se resolverá un caso simple en el que el periodo del pago de renta coincide con el periodo de pago de la tasa de interés.

Ejemplos resueltos del capítulo

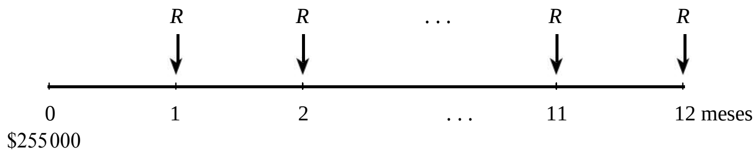
Ejemplo 1

Una deuda de $255000 será amortizada mediante 12 pagos iguales vencidos que contienen capital e interés; la tasa de interés cobrada por el crédito es de 30% anual capitalizable mensualmente; calcular el importe del pago mensual y calcular la tabla de amortización.

Solución

Como la frecuencia del pago de la renta es mensual y también la de la tasa de interés, la unidad de tiempo más práctica para realizar los cálculos es el mes; en el siguiente diagrama se ubican las obligaciones:

[6] A_1 corresponde al capital prestado o principal porque, según la notación empleada, A_1 significa el capital insoluto al *inicio* del periodo 1; es decir, A se ubica en el momento en que se pacta el crédito, el momento cero.



Como la tasa efectiva i mensual = $\frac{\frac{0.30}{360}}{30}$ = 0.025 puede emplearse directamente la expresión [6.2]:

$$\$255{,}000 = \mathrm{R}\,[(1+0.025)^{-1} + (1+0.025)^{-2} + \cdots + (1+0.025)^{12}]$$

El cálculo de R puede efectuarse directamente o bien empleando las expresiones [6.3] o [6.4]; así, según esta última:

$$\$\,255{,}000 = R\left[\frac{1+(1+0.025)^{-12}}{0.025}\right]$$

$$R = 24859.22$$

El cuadro 6.2 muestra los cálculos previos para llegar a la tabla de amortización respectiva.

Cuadro 6.2
Cálculo de la tabla de amortización

	Deuda	**Distribución del pago**		
Pago (final del periodo *t*)	**Capital insoluto al principio del periodo**	**Interés contenido en el pago**	**Capital contenido en el pago**	**Total de capital pagado**
1	$255,000	0.025($255,000)	$24859 – [(0.025)(255000)] = 18484	$18,484
2	$255,000 – 18,484 = 236516	0.025($236,516)	$24,859 – [(0.025)(236516)] = 18,946	$18,484 + 18,946 = 37,430
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$= A_{n-1} ccp_{n-1}$	$I_n = iA_n$	$ccp_n = R - iA_n$	$ccp_1 + ccp_2 + \cdots + ccp_n$

Tabla de amortización del ejemplo 1

Deuda: $255000	**Tasa: 30% anual capitalizable mensualmente**
Plazo: 12 meses	**Tipo: Vencido**
Pago: Mensual	**Pagos fijos con tasa fija: $24859.22***

Número de pagos (meses) periodo	Capital insoluto al principio del periodo	Pagos: Interés contenido	Pagos: Capital contenido	Total de capital pagado
1	$255000	$6375	$18484	$18484
2	236516	5913	18946	37431
3	217569	5439	19420	56851
4	198149	4954	19905	76756
5	178244	4456	20403	97159
6	157841	3946	20913	118072
7	136928	3423	21436	139508
8	115492	2887	21972	161480
9	93520	2338	22521	184001
10	70999	1775	23084	207086
11	47914	1198	23661	230747
12	24253	606	24253	255000
Suma		$43311	$255000	

* Los cálculos se realizaron con 6 decimales aunque los resultados se redondean al peso más cercano.

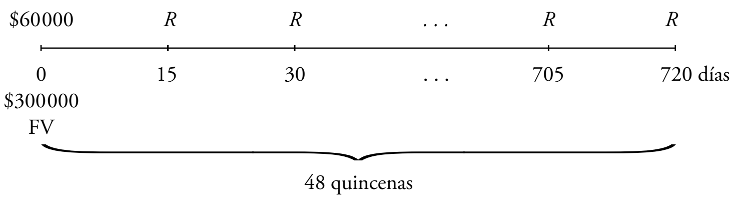
Ejemplo 2

Para comprar un bien inmueble se recurre a un financiamiento que consiste en dar un enganche de 20% del precio de contado de $300000. El resto se pagará mediante rentas quincenales vencidas iguales que incluyen una parte del interés y una parte del capital; el plazo es dos años y la tasa de interés es de 18% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el importe del pago quincenal? ¿Cuál es el comportamiento de la deuda?

Solución

Este es un caso en que las frecuencias de pago de la tasa y de la renta no coinciden, lo cual no debe provocar ningún cálculo adicional porque se puede establecer la ecuación de valor como se hizo en la sección 5.4 del capítulo 5; sin embargo, se presenta también la alternativa: se calcula una tasa equivalente cuyo periodo de capitalización coincide con el periodo de pago de la renta.

Las dos series de obligaciones de las partes se ubican en el diagrama siguiente (debe considerarse que el primer pago que se realiza en el momento de pactar la operación corresponde al enganche):



La alternativa de cálculo considera la fecha de valuación como el momento presente:

a) Si se considera como unidad de tiempo el periodo de pago de la tasa de interés:

$$\$300000 = 60000 + R\left[\left(1 + \frac{\frac{0.18}{360}}{30}\right)^{-\frac{15}{30}} + \left(1 + \frac{\frac{0.18}{360}}{30}\right)^{-\frac{30}{30}} + \ldots + \left(1 + \frac{\frac{0.18}{360}}{30}\right)^{-\frac{720}{30}}\right]$$

$R = 5968.59$ Importe del pago quincenal a efectuarse durante dos años en forma vencida

b) Si se considera como unidad de tiempo al periodo de pago de la renta: el periodo de 15 días.

Primero se debe encontrar la tasa de interés anual capitalizable quincenalmente, *equivalente* al 18% anual pagadero mensualmente; se emplea la expresión [3.11] del capítulo 3:

$$\left(1+\frac{i^{\frac{360}{15}}}{\frac{360}{15}}\right)^{\frac{360}{15}}=\left(1+\frac{0.18}{\frac{360}{30}}\right)^{\frac{360}{30}}$$

$$\left(\frac{i^{\frac{360}{15}}}{\frac{360}{15}}\right)=0.007472 \qquad \text{Tasa efectiva quincenal}$$

$$i^{\frac{360}{15}}=0.179330 \qquad \text{Tasa anual capitalizable quincenalmente equivalente a } i^{\frac{360}{30}}=0.18$$

Con esta tasa equivalente se establece la ecuación de valor:

$$300000=60000+R\left[\left(1+\frac{0.179330}{\frac{360}{15}}\right)^{-\frac{15}{15}}+\left(1+\frac{0.179330}{\frac{360}{15}}\right)^{-\frac{30}{15}}+\left(1+\frac{0.179330}{\frac{360}{15}}\right)^{-\frac{45}{15}}+\ldots+\left(1+\frac{0.179330}{\frac{360}{15}}\right)^{-\frac{720}{15}}\right]$$

$$240000=R\left[\left(1+\frac{0.179330}{24}\right)^{-1}+\left(1+\frac{0.179330}{24}\right)^{-2}+\left(1+\frac{0.179330}{24}\right)^{-3}+\ldots+\left(1+\frac{0.179330}{24}\right)^{-48}\right]$$

$R=\$5968.59$

Los resultados en a) y b) son iguales porque se emplean tasas equivalentes; para efectos de cálculo es más sencilla la segunda expresión; sin embargo, se debe apreciar que no es necesario obtener una tasa equivalente cuyo periodo unitario de pago coincida con el periodo de pago de la renta para el cálculo de esta última cantidad; no obstante, sí se requiere cuando se calcula la tabla de amortización.

En la siguiente tabla se muestra el proceso de amortización:

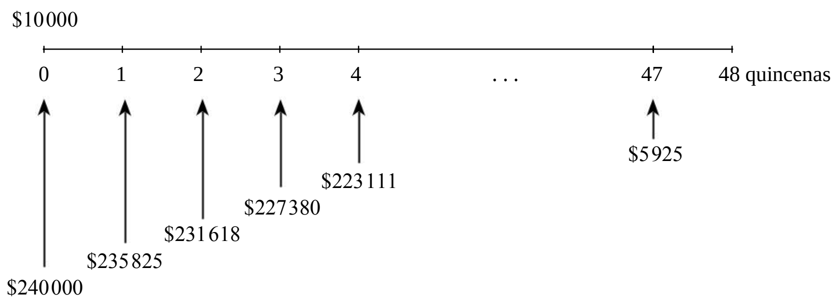
Tabla de amortización del ejemplo 2

Deuda: $240,000	**Tasa: 18% anual capitalizable mensualmente**
Plazo: 48 quincenas*	**Tipo: Vencido**
Pago: Quincenal	**Pagos fijos con tasa fija: $5,968.59***

Número de pagos (meses) periodo	**Capital insoluto al principio del periodo**	**Pagos**		**Total de capital pagado**
		Interés contenido	**Capital contenido**	
1	$240,000	$1,793	$4,175	$4,175
2	235825	1762	4206	8382
3	231618	1731	4238	12620
4	227380	1699	4270	16889
5	223111	1667	4301	21191
6	218809	1635	4334	25524
7	214476	1603	4366	29890
8	210110	1570	4399	34289
9	205711	1537	4432	38721
10	201279	1504	4465	43185
11	196815	1471	4498	47683
12	192317	1437	4532	52215
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
48	5925	44	5924	240000
Suma		$46,492.45	$240000	

*Por razones de espacio sólo se muestran en la tabla los primeros 12 pagos y el último; por este motivo las sumas verticales de la composición del pago parecerían no coincidir.

El diagrama de tiempo siguiente muestra la ubicación del capital insoluto durante el plazo contratado.



Al observar la tabla de amortización del ejemplo 2 se conocen algunas de las respuestas a preguntas frecuentes hechas tanto por acreedores como por deudores:

a) Al momento de efectuar el cuarto pago el acreedor recibe $1,699 por concepto de intereses y el deudor abona a capital $4,270.[7]
b) Hasta ese momento el acreedor ha recibido por concepto de intereses la cantidad de $6,985 (súmense los intereses del primero al cuarto mes).
c) Al inicio de la cuarta quincena, es decir, al final de la tercera quincena[8] se ha pagado un total de $12,620 del crédito originalmente contratado.
d) Al inicio de la cuarta quincena el deudor aún tiene la obligación de pagar $227380; si se deseara reestructurar la deuda en ese momento (en la tercera quincena exactamente), el nuevo capital objeto de la transacción sería éste (véase figura 6.4).
e) El acreedor recibe por concepto de intereses durante los dos años la cantidad de $46,492.68. Debe observarse que los intereses pagados en un préstamo amortizable reciben tratamientos fiscales específicos[9] según haya sido el destino del préstamo; de ahí la importancia de identificarlos plenamente con la construcción de la tabla de amortización.

En una operación de crédito, a medida que el deudor cumple con sus operaciones y realiza los pagos convenidos, va adquiriendo derechos sobre la propiedad del bien, mientras que el acreedor continúa siendo propietario de la parte restante de los derechos (sólo del capital insoluto).

Así, por ejemplo, al inicio de la sexta quincena el acreedor aún posee derechos sobre el bien por la cantidad de $218,809 (91.17% del total del capital prestado) y el deudor ya ha adquirido derechos sobre el 8.83% restante que equivale a $21,191.

Con el tipo de respuestas mostradas parece conveniente disponer de la tabla de amortización.

Ejemplo 3

Suponga que se desea adquirir un automóvil mediante un financiamiento directo a un año. El precio de contado del vehículo es de $285,000 y el financiamiento consiste en un enganche de 20% sobre el precio de contado con una tasa fija nominal de 30% capitalizable mensualmente y pagos fijos mensuales.

[7] Sólo los abonos a capital disminuyen la deuda; los intereses representan el servicio de la deuda.

[8] Recuérdese que el final de un periodo coincide con el inicio del siguiente; asimismo, el capital insoluto siempre está ubicado al inicio del periodo y a partir de él se calculan los intereses.

[9] El acreedor paga impuestos por los intereses recibidos y el deudor paga también, por ejemplo, el impuesto al valor agregado sobre los intereses.

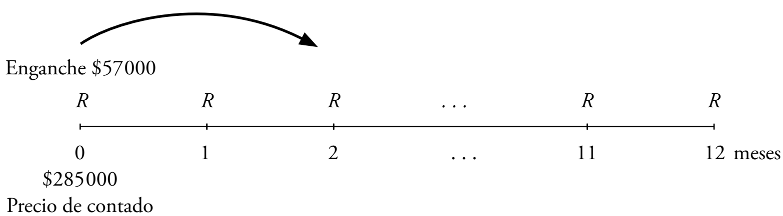
a) ¿Cuál es el importe del capital pagado hasta antes de realizar el sexto pago?
b) ¿Cuál es el total de intereses pagados durante los primeros seis meses?
c) ¿Cuál es el importe de los intereses y el capital contenidos en el sexto pago?
d) ¿Cuál es el total de intereses pagados por el crédito?
e) Si se deseara reestructurar la deuda (ya sea para modificar el plazo o el importe del pago mensual) después de haber realizado exactamente cinco pagos, ¿cuál sería el capital insoluto en ese momento?
f) ¿Qué porcentaje de la propiedad del bien poseerá el deudor después de haber realizado el quinto pago?

Constrúyase la tabla de amortización para responder estas preguntas.

Solución

Primero deberá calcularse el importe del pago mensual; para ello es importante identificar las obligaciones del deudor y del acreedor.

Las obligaciones del deudor son pagar el enganche y 12 pagos mensuales, mientras que las del acreedor es entregar en este momento un bien cuyo precio de contado sea de $285000; dichas obligaciones se ubican en el siguiente diagrama:



De acuerdo con el principio de equitatividad que dice que las obligaciones del deudor y del acreedor son iguales, valuadas con una misma tasa de interés y en la misma fecha, el resumen es:

$$\boxed{\text{Precio de contado} = \text{Enganche} + \text{Mensualidades}}$$

Se considerará como unidad de tiempo el mes; así, la ecuación de valor que permite calcular el importe del pago mensual es:

$$\$285000 = 57000 + R\left[\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{-1} + \left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{-2} + \ldots + \left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{-12}\right]$$

En donde

\$57000	corresponde al 20% de enganche
i:	Tasa de interés por periodo de pago de la renta (mensual). Para este caso $\frac{\frac{0.30}{360}}{30} = 0.025$
R:	Valor de los pagos fijos mensuales al contratar el financiamiento del auto

Entonces:

$$\$228000 = R[(1+0.025)^{-1} + (1+0.025)^{-2} + \ldots + (1+0.025)^{-12}]$$
$$\$228000 = R(10.2577646)$$
$$\$22227.07 = R$$ Es el importe del pago mensual a efectuarse durante un año en forma vencida

Cálculo de la tabla de amortización

Una vez calculada la renta R puede construirse la tabla de amortización empleando la metodología mostrada.

En la tabla siguiente se presenta una columna que muestra la renta fija mensual (que para efectos de control en el cálculo de la tabla proviene de la suma del capital y de los intereses contenidos en el pago); asimismo, se omite la columna Total de Capital Pagado pero puede comprobarse que efectivamente se ha liquidado la deuda al final del plazo convenido al sumarse la columna de Capital Contenido en el pago.

Tabla de amortización del ejemplo 3

Deuda: \$228000 — **Tasa: 30% anual capitalizable mensualmente**
Plazo: 12 meses — **Tipo: Vencido**
Pago: Mensual — **Pagos fijos con tasa fija: \$22227.07**

Número de periodo (mes)	Capital insoluto al principio del periodo	Pagos		
		Interés contenido	Capital contenido	Renta o pago
1	\$228000.00	\$5700	\$16527.06	\$22227.07
2	\$211472.94	\$5286.82	\$16940.24	\$22227.07
3	\$194532.69	\$4863.32	\$17363.75	\$22227.07
4	\$177168.95	\$4429.22	\$17797.84	\$22227.07
5	\$159371.10	\$3984.28	\$18242.79	\$22,227.07
6	\$141128.32	\$3528.21	\$18698.86	\$22227.07
7	\$122429.46	\$3060.74	\$19166.33	\$22227.07
8	\$103263.13	\$2581.58	\$19645.49	\$22227.07
9	\$83617.65	\$2090.44	\$20136.62	\$22227.07
10	\$63481.02	\$1587.03	\$20640.04	\$22227.07
11	\$42840.98	\$1071.02	\$21156.04	\$22227.07
12	\$21684.94	\$542.12	\$21684.94	\$22227.07
Suma		\$38724.78	\$228000	

Al observar la tabla de amortización puede responderse a las preguntas planteadas:

a) Al inicio del sexto mes, es decir, al final del quinto mes, se ha pagado un total de $86,871.68 del crédito originalmente contratado; súmense los primeros 5 renglones de la columna Capital contenido en el pago.
b) Hasta ese momento el acreedor ha recibido por concepto de intereses la cantidad de $24,263.64 (súmense los intereses del primero al quinto mes).
c) En el momento de efectuar el sexto pago el acreedor recibe $3,528 por concepto de intereses y el deudor abona al capital $18,698.86.
d) El acreedor recibe por concepto de intereses durante el año del préstamo la cantidad de $38,724.78. Debe señalarse que los intereses señalados en un préstamo amortizable reciben tratamientos fiscales específicos según haya sido el destino del préstamo; de ahí la importancia de identificarlos plenamente con la construcción de la tabla de amortización.
e) El deudor aún tiene la obligación de pagar $141,128.32 durante los 7 meses restantes; es decir, el capital insoluto al principio del sexto mes sería el nuevo capi-tal objeto de la transacción; este capital se ubica al final del quinto mes; el primero de los subsiguientes pagos se efectuaría al final del sexto mes exactamente (que coincide con el principio del séptimo mes).
f) En una operación de crédito, a medida que el deudor cumple con sus obligaciones, es decir, realiza los pagos convenidos, va adquiriendo derechos sobre la pro-piedad del bien, mientras que el acreedor continúa siendo propietario de la par-te restante de los derechos (sólo del capital insoluto). Así, por ejemplo, al inicio del sexto mes el acreedor aún posee derechos sobre el bien por la cantidad de $141,128 (61.89% del total del capital prestado) y el deudor ya ha adquirido derechos sobre el 38.11% restante, que equivale a $86,872.

Con el tipo de respuestas mostradas parece conveniente disponer de la tabla de amortización.

Ejemplo 4

Calcular la amortización del crédito del ejemplo 3 considerando amortizaciones de capital iguales y el cálculo de intereses sobre saldos insolutos (a este método se le conoce como *tradicional bancario*).

Solución

El método de amortizaciones iguales significa que el importe total del crédito se divide por el número de pagos para obtener el importe del pago periódico; los intereses se siguen calculando sobre capitales insolutos:

$$\text{Pago periódico} = \frac{\text{Valor total del crédito}}{\text{Número de pagos}}$$

La tabla de amortización a 12 meses se presenta directamente: el pago mensual es de $19000.

Debe observarse que con este método de amortizaciones iguales se paga una menor cantidad por concepto de intereses y los pagos periódicos son decrecientes, pero los primeros pagos superan el importe fijo obtenido con el método prospectivo.

Tabla de amortización del ejemplo 4

Deuda: $228000	**Tasa: 30% anual capitalizable mensualmente**
Plazo: 12 meses	**Tipo: Vencido**
Pago: Mensual	**Pagos fijos con tasa fija: $228000/12 = $19000**

Número de periodo	Capital insoluto al principio del periodo	Pagos		
		Interés contenido	Capital contenido	Renta o pago
1	$228000	$5700	$19000	$24700
2	$209000	$5225	$19000	$24225
3	$190000	$4750	$19000	$23750
4	$171000	$4275	$19000	$23275
5	$152000	$3800	$19000	$22800
6	$133000	$3325	$19000	$22325
7	$114000	$2850	$19000	$21850
8	$95000	$2375	$19000	$21375
9	$76000	$1900	$19000	$20900
10	$57000	$1425	$19000	$20425
11	$38000	$950	$19000	$19950
12	$19000	$475	$19000	$19475
Suma		$37050	$228000	$265050

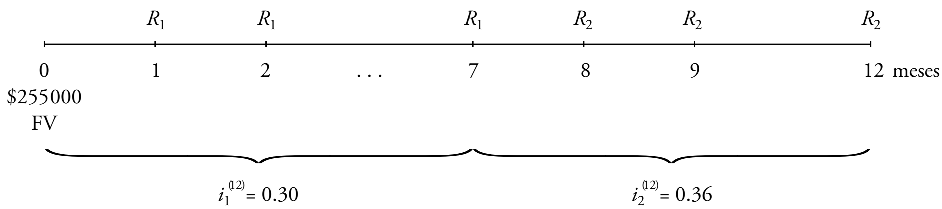
Ejemplo 5

Supóngase que en el ejemplo 1 se contrata la deuda a tasa variable: durante los primeros 7 meses se pagará una tasa de 30% anual capitalizable mensualmente y de ahí en adelante esta tasa aumentará 6 puntos porcentuales (pp). Calcular el importe del pago y la tabla de amortización.

Solución

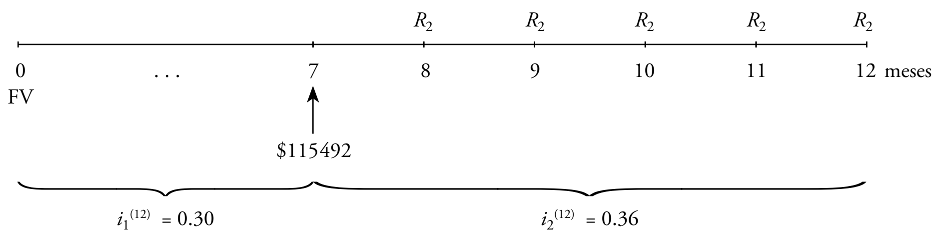
Cuando se presenta el caso de deudas contratadas a tasa variable, el más usual en la práctica, se calcula el importe del pago que permanecerá fijo durante todo el tiempo que opera una tasa y a partir del momento de vigencia de la nueva tasa de interés se calcula otra vez el importe del pago a partir del capital insoluto en ese momento; el nuevo pago permanece fijo durante la vigencia de la tasa de interés nueva. De hecho se obtienen tantas tablas de amortización como tasas de interés operan durante el plazo de la deuda contratada.

En el siguiente diagrama se ilustra el caso (la unidad de tiempo será el mes, así $i^{\frac{360}{30}} = i^{12}$ es la tasa nominal capitalizable mensualmente, de tal manera que $i = \frac{i^{12}}{12}$ es la tasa efectiva mensual. Para distinguir los pagos se identificarán éstos como R_1 y R_2 calculados a las tasas i_1^m e i_2^m, respectivamente):



Obsérvese que el pago R_1 se efectúa sólo durante 7 meses y el pago R_2 durante 5. Para calcular R_1 se supone que la tasa de interés $i_1^{(12)} = 0.30$ permanecerá fija durante los 12 meses. Así, el pago buscado corresponde al que se calculó en el ejemplo 1 cuyo importe es de $24859.22; la tabla de amortización correspondiente está representada por los primeros 7 renglones de la nueva tabla de amortización.

El cambio de la tasa de interés que se produce en el séptimo mes implica calcular la nueva renta R_2 a partir del capital insoluto al principio del octavo mes; véase el siguiente diagrama que muestra el estado de la nueva deuda:[10]



Con la nueva tasa efectiva $i = \frac{0.36}{\frac{360}{30}} = 0.03$, se establece la nueva ecuación:

[10] Debe señalarse que el *inicio* del octavo mes corresponde al *final* del séptimo.

$$\$115492 = R_2\,[(1+0.03)^{-1} + (1+0.03)^{-2} + (1+0.03)^{-3} + (1+0.03)^{-4} + (1+0.03)^{-5}]$$

$R_2 = \$25218.21$ Importe de la nueva renta con la nueva tasa de interés $i_2^{(12)} = 0.36$

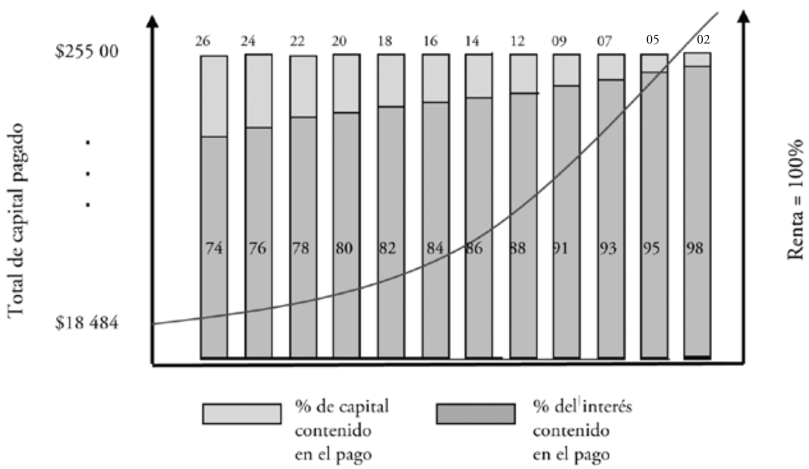
Con esta nueva renta se continúa la construcción de una nueva tabla de amortización; véase la siguiente tabla:

Tabla de amortización del ejemplo 5

Deuda: $255000	**Tasa variable: 30% anual para primeros 7 meses y 36% anual para los restantes**
Plazo: 12 meses	**Tipo: Vencido**
Pago: Mensual	**Pagos fijos: $24859.22 y $25218.21**

	Número de pagos (meses) periodo	Capital insoluto al principio del periodo	Pagos			
			Interés contenido	Capital contenido	Renta	Total de capital pagado
$i_{1(12)} = 0.30$	1	$255,000	$6, 375	$18, 484	$24, 859	$18, 484
	2	236516	5 913	18 946	24 859	37 431
	3	217569	5 439	19 420	24 859	56 851
	4	198149	4 954	19 905	24 859	76 756
	5	178244	4 456	20 403	24 859	97 159
	6	157841	3 946	20 913	24 859	118 072
	7	136928	3 423	21 436	24 859	139 508
$i_{2(12)} = 0.36$	8	115492	3 465	21 753	25 218	161 262
	9	93 739	2 812	22 406	25 218	183 668
	10	71 332	2 140	23 078	25 218	206 746
	11	48 254	1 448	23 771	25 218	230 517
	12	24 484	735	24 484	25 218	255 000
	Suma		$45,105	$255, 000		

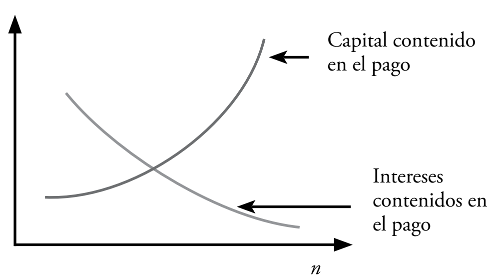
Gráfica 6.1
Comportamiento inverso del capital y de los intereses contenidos en el pago en el proceso de amortización de una deuda (%)



FUENTE: Tabla de amortización del ejemplo 5.

La suma del capital contenido del pago corresponde a la deuda original (principal).[11] La suma de los intereses pagados es igual a la diferencia entre la suma del total de pagos (rentas) y el capital prestado ($24859.22 × 12 – 255000 = 43311). Véase ejemplo 1.

Gráfica 6.2
Comportamiento inverso del capital y de los intereses contenidos en el pago en el proceso de amortización de una deuda



[11] Este valor se obtiene directamente al observar el último renglón de la columna del capital contenido en el pago en la tabla de amortización del ejemplo 1; en algunas tablas se omite esta última columna porque podría parecer redundante.

Con el enfoque *prospectivo* empleado para amortizar una deuda se tiene la garantía de que el crédito se liquida al efectuar el n-ésimo pago; en ese momento se liquida el capital insoluto más los intereses devengados. También permite que a medida que transcurre el tiempo, las rentas contengan una mayor porción del capital a amortizar porque los intereses disminuyen al calcularse sobre el capital insoluto; aunque el pago R es fijo, los intereses tienen un comportamiento decreciente por lo que los pagos a capital se comportan en forma creciente (véase gráfica 6.2).

Ejercicios propuestos

1. Una deuda a 30 años se liquida mediante pagos fijos mensuales de $15,000 calculados a la tasa de 13% anual capitalizable mensualmente: a) ¿cuál es el importe de la deuda?, b) si dentro de 7 años exactamente se aplica un pago de $75,000 directamente al capital y el nuevo capital insoluto resultante se renegocia a una tasa de 12% anual durante el tiempo faltante, ¿cuál será el nuevo pago mensual?, c) ¿cuál es el importe de los intereses pagados por el crédito?
Sol.: a) $1’355,994.12, b) $13,238.00, c) $632,695.52

	Número de pagos	Capital insoluto	Composición del pago		Pago fijo con tasa variable
			Interés	Capital	
$i_{(12)} = 0.13$	1	1355994.08	14689.93	310.06	15000
	2	1355684.01	14686.57	313.42	15000
	...				
	84	1314616.28	14241.67	758.32	15000
	Suma		1217863.88	42136.12	
$i_{(12)} = 0.12$	85	1238857.96		849.42	13238
	...				
	359	26085.66	260.85	12977.14	13238
	360	13108.51	131.08	13106.91	13238
	Suma		3’632,698.52	1’238,856.36	

2. Se otorga un crédito por $400000 a 12 meses mediante rentas iguales; el primer pago debe realizarse al final del cuarto mes y la tasa de interés es de 30% nominal capitalizable mensualmente. Calcular el importe del pago periódico.
Sol.: $41993.18.

Número de pagos (meses)	Capital insoluto al principio del periodo	Composición del pago		Renta
		Interés	Capital	
1	430756.25	10768.90	31224.28	41993.18
2	399531.96	9988.29	32004.89	41993.18
...				
11	80938.68	2023.46	39969.72	41993.18
12	40968.96	1024.22	40968.96	41993.18
Suma		73162.02	430756.25	

3. Se adquiere una propiedad en $360, 000, el comprador paga $60,000 al contado y acuerda aportar $40,000 al final de cada mes. Si la tasa de interés es de 10% efectiva mensual, ¿cuántos pagos completos deberán realizarse y cuál será el valor del pago fraccionario que cancela si éste se efectúa un mes después de que se realizó el último pago de $40,000? Elabore la tabla de amortización para responder.
   Sol.: 14 pagos completos de $40,000 y uno fraccionario de $22,275.17.

Número de pagos (mes)	Capital insoluto al principio del periodo	Composición del pago	
		Interés contenido	Capital contenido
1	300000	30000	10000
2	290000	29000	11000
...			
14	54772.87	5477.28	34522.71
15	20250.16	2025.01	20,250.17
Suma			300000

4. Elabore la tabla de amortización para una deuda de $500000 pactada a 3 años mediante rentas semestrales fijas vencidas. La tasa de interés que se cobra es de 22% nominal capitalizable cada 28 días: a) si se realizan cuatro pagos, ¿cuál es la cantidad con la que se puede cancelar el adeudo?, b) ¿cuál es el importe total de interés pagado después de efectuar los dos primeros pagos periódicos?
   Sol.: a) $204044.01, b) $108053.80.

Número de pagos (meses)	Capital insoluto al principio del periodo	Composición del pago	
		Interés	Capital
1	500000	57619.92	62357.84
2	437642.15	50433.81	69543.95
...			
5	204044.01	23514.00	96463.77
6	107580.24	12397.53	107580.24
Suma		219,866.62	500,000

5. Un banco ofrece prestar $100,000 a sus clientes distinguidos a una tasa preferencial de 1.08% mensual. La cantidad solicitada se pagará en cinco mensualidades fijas, ¿cuál será el importe de cada pago mensual? Elaborar la tabla de amortización.
   Sol.: $20,652.64.

Número de pagos	Capital insoluto	Composición del pago Interés	Capital
1	100000	1080	19572.63
2	80426.53	868.61	19784.02
3	60642.5	654.94	19997.7
4	40644.79	438.96	20213.68
5	20431.12	220.66	20431.97
Suma			100000

6. Un préstamo hipotecario por $300,000 se amortiza mediante pagos mensuales fijos a una tasa de 12% y un enganche de 15% sobre el precio de contado: a) ¿cuál es el importe de los intereses si los plazos fueran de 20 o de 25 años?, b) ¿cuál sería el costo del financiamiento incluyendo el enganche en cada caso?, c) si se realizan pagos durante cinco años y en ese momento se desea cancelar la deuda en una sola exhibición, ¿cuál sería el importe de ese pago en cada caso?
   Sol.: a) $418,864.71; $550,716.47, b) $718,864; $850,716., c) $233,948; $243915.
7. Elabore una tabla de amortización para una deuda de $100000 contratada a 5 años con pagos bimestrales vencidos iguales y tres pagos semestrales cada uno de ellos iguales al importe de tres bimestralidades; la tasa de interés pactada es de 18% anual convertible semestralmente. El primer pago semestral se realiza dentro de seis meses.

Número de pagos (bimestres)	Capital insoluto	Composición del pago Interés	Capital	Renta
1	100000.00	2914.25	733.61	3647.85
2	99266.39	2892.87	754.99	3647.85
3	98511.41	2870.87	11720.55	14591.41
4	86790.86	2529.30	1118.55	3647.85
5	85672.31	2496.70	1151.15	3647.85
6	84521.16	2463.16	12128.26	14591.41
7	72392.90	2109.71	1538.15	3647.85
8	70854.76	2064.88	1582.97	3647.85
9	69271.79	2018.75	12572.66	14591.41
10	56699.13	1652.35	1995.50	3647.85
11	54703.63	1594.20	2053.65	3647.85
...				
29	6988.74	203.67	3444.18	3,647.85
30	3544.56	103.3	3544.56	3647.85
Suma			100000	

8. Una deuda de $500,000 se pacta a 3 años mediante pagos semestrales fijos vencidos; se extingue además con 3 pagos anuales a efectuarse al final de cada año; cada uno de estos 3 pagos es igual al importe de dos semestralidades: a) ¿cuál es el importe de los pagos periódicos si la tasa es de 22% nominal capitalizable cada 28 días?, b) elabore la tabla de amortización.

   Sol.: a) 61668.78.

   b):

Número de pagos (semestres)	Capital insoluto	Composición del pago Interés	Capital	Renta
1	500000	57619.93	4048.86	61668.78
2	495951.14	57153.34	127853.00	185006.34
3	368098.14	42419.57	19249.21	61668.78
4	348048.94	40201.30	144805.04	185006.34
5	204043.89	23513.99	38154.79	61668.78
6	165889.10	19117.04	165889.10	185006.34
Suma			500000.00	

9. Para extinguir una deuda de $150000 se paga una tasa fija de 25% que corresponde a Cetes a 28 días en un plazo de 2 años con pagos semestrales fijos. Elabore la tabla de amortización.

   Sol.:

Número de pagos (semestres)	Capital insoluto	Composición del pago Interés	Capital	Renta
1	150000	19768.50	30848.30	50616.80
2	119151	15703.00	34913.80	50616.80
3	84237	11101.70	39515.10	50616.80
4	44722	5894.00	44722.80	50616.80
Suma			150000	

10. Se adquiere un terreno por $6.5 millones mediante un pago de contado de $1.5 millones y el resto en pagos mensuales durante 5 años. El financiamiento se pacta a una tasa de 8% anual convertible mensualmente los primeros dos años y de 9% convertible mensualmente durante el tiempo restante: a) ¿cuál es el importe de los pagos mensuales?, b) si después de dos años de haber contraído la deuda, el comprador del terreno desea traspasarla, ¿qué cantidad de dinero debería pedir como mínimo? Considere que no hay inflación, c) ¿cuál es la transferencia de derechos del deudor por el crédito efectuado al final del segundo año?

    Sol.: a) $102,203.56, b) $3’952,885.44 c) 35.54%.

$i^{(12)} = 0.08$

$i^{(12)} = 0.09$

Número de pagos (mes)	Capital insoluto	Composición del pago		
		Interés	Capital	Renta
1	5’000,000	33,333.33	68,870.23	102,203.56
2	4’931,129.77	32,874.20	69,329.363	102,203.56
3	4’861,800.41	32,412.00	69,791.56	102,203.56
…				
22	3’453,110.98	23,020.74	79,182.82	102,203.56
23	3’373,928.16	22,492.85	79,710.71	102,203.56
24	3’294,217.45	21,961.45	80,242.11	102,203.56
…				
58	302,068.24	2,265.51	99,938.05	102881.095
59	202,130.19	1,515.98	100,687.58	102881.095
60	101,442.60	760.82	101,442.74	102,203.56
Suma		$ 1’132,213.46	$ 5’000,000.00	

Para saldar una deuda de medio millón de pesos se efectúan pagos mensuales vencidos de $15,000. El acreedor cobra una tasa de 10% anual capitalizable mensual-mente, determinar: a) ¿cuántos pagos de $15,000 se realizarán para extinguir la deuda?, b) ¿cuál sería el importe del pago complementario efectuado un mes después de haber realizado el último pago de $15000? Elabore una tabla de amortización para responder.
Sol.: a) 39 pagos, b) $ 3,208.06.

Número de pagos (meses)	Capital insoluto al principio del periodo	Composición del pago		
		Interés	Capital	Renta
1	500,000.00	4,166.67	10,833.33	15,000
2	489,166.67	4,076.39	10,923.61	15,000
...				
38	32,758.30	272.99	14,727.01	15,000
39	18,031.29	150.26	14,849.74	15,000
	3,181.55	26.51	3,181.55	
Suma			500,000.00	

12. Un automóvil con valor de $160000 se compra con un enganche de 15% y pagos mensuales iguales durante 24 meses, con una tasa del 14 ¼% nominal convertible mensualmente. Cuando el deudor ha pagado 8 mensualidades renegocia su deuda de la siguiente manera: pagos mensuales de $2000 a 17% durante el tiempo que sea necesario hasta extinguir la deuda: a) ¿cuántos pagos de $2000 deben realizar?, b) si hubiese que realizar un pago complementario, ¿cuál sería su importe? Elabore la tabla de amortización para responder.
Sol.: a) 79 pagos de $2,000, b) pago complementario de $501.68.

Número de pagos	Capital insoluto	Interés	Capital	Renta
1	136,000.00	1,615.00	4,930.83	6,545.83
2	131,069.17	1,556.45	4,989.38	6,545.83
8	100,229.97	1,190.23	5,355.59	6,545.83
9	94,874.37	1,344.05	655.95	2,000.00
10	94,218.43	1,334.76	665.24	2,000.00
...				
86	4,397.53	62.30	1,937.70	2,000.00
87	2,459.83	34.85	1,965.15	2,000.00
88	494.67	7.01	494.67	501.68
Suma			136,000.00	

13. Para apreciar los beneficios que trae consigo el contratar deudas por periodos más cortos y tasas de interés más bajas, verifique el siguiente cuadro comparativo para una deuda de $100,000 a 10, 15, 20, 25 y 30 años con pagos fijos mensuales a una tasa fija de interés de 15% y de 16% anual convertible mensualmente respectiva-mente.

Años	Núm. de pagos (Mensuales)	Renta (al 15%)	Total pagado	Interés
30	360	1,264.44	$455 198.40	$355,198.40
25	300	1,280.83	$384,249.00	$284,249.00
20	240	1,316.78	$316,027.20	$216,027.20
15	180	1,399.58	$251,924.40	$151,924.40
10	120	1,613.34	$193,600.00	$93,600.00

Años	Núm. de pagos (Mensuales)	Renta (al 16%)	Total pagado	Interés
30	360	1,344.76	$484,113.60	$384,113.60
25	300	1,358.88	$407,664.00	$307,664.00
20	240	1,391.25	$333,900.00	$233,900.00
15	180	1,468.70	$264,366.00	$164,366.00
10	120	1,675.13	$201,015.60	$101,015.60

Conviene recordar

1. Al calcular una tabla de amortización es necesario emplear la tasa efectiva por periodo de pago; no sucede así para el cálculo de la renta *R*.

2. El total de capital pagado debe ser exac-tamente igual al importe del préstamo.

3. La renta *R* se obtiene con el método *prospectivo* y en cada periodo de pago esigual a los intereses más el capital paga-do en ese periodo.

4. Los intereses de los primeros pagosson mayores debido a que se calculan sobre saldos insolutos, es decir, la deuda todavía no ha disminuido significativamente.

5. La suma de los intereses y del capi-tal contenido en el pago es igual al importe del pago periódico.

6. Los nombres de las columnas o número de ellas pueden variar, pero es importante que siempre se muestre la composición del pago en intereses y capital así como del capital que se adeuda al final de cada periodo de pago, el capital insoluto.

Fórmulas financieras

Si se emplea la notación de anualidades reducidas con series geométricas, el cálculo de una tabla de amortización se expresa de la siguiente manera:

			Distribución del pago	
Número de pago	**Capital insoluto al principio del periodo**	**Importe del pago periódico**	**Intereses contenidos en el pago**	**Capital contenido en el pago**
1	$R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$	R	$1-(1+i)^{-n}$	$(1+i)^{-n}$
2	$R\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]$	R	$1-(1+i)^{-(n-1)}$	$(1+i)^{-(n-1)}$
3	$R\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-2)}}{i}\right]$	R	$1-(1+i)^{-(n-2)}$	$(1+i)^{-(n-2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$R\left[\frac{1-(1+i)^{-[(n-(t-1)]}}{i}\right]$	R	$1-(1+i)^{-[n-(t-1)]}$	$(1+i)^{-[n-(t-1)]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$R\left[\frac{1-(1+i)^{-1}}{i}\right]$	R	$1-(1+i)^{-1}$	$(1+i)^{-1}$
Total		R	$R(n\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right])$	$R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$

Capítulo 7
Análisis de inversiones

Introducción

La aceptación o el rechazo de un proyecto de inversión representa, quizá, la decisión más importante que pudieran tomar los administradores financieros porque compromete recursos en el largo plazo que pudieran afectar las operaciones de la empresa. La toma de decisiones basada en la aplicación incorrecta de la técnica que compara en el tiempo los flujos esperados de efectivo puede poner en peligro la viabilidad financiera de la empresa.

El objetivo de este capítulo es conocer y aplicar dos métodos y sus respectivos criterios de decisión, para evaluar y seleccionar alternativas de inversión financiera por medio de los descuentos de sus flujos de efectivo esperados. Se explican dos de los métodos más poderosos para evaluar alternativas de inversión: los basados en la técnica de flujos de efectivo descontados,[1] tales como el valor presente neto (VPN), o valor actual neto (VAN), y la tasa interna de rendimiento (TIR). Su fortaleza radica en que los flujos de efectivo del proyecto pueden ser variables en el tiempo y pueden efectuarse en intervalos no uniformes. Los flujos de efectivo pueden ser positivos (cuando existen ingresos), negativos (cuando hay egresos) o incluso de cero (cuando no hay ingresos pero tampoco egresos). Todos los flujos de efectivo ocurren en forma vencida anual excepto que se precise de otra forma.

Se trabajará con proyectos mutuamente excluyentes[2] y con flujos de efectivo convencionales y no convencionales,[3] los cuales generan tasas internas de rendimiento

[1] Debe señalarse que cuando se habla de descontar flujos de efectivo, se descuentan con una tasa de interés —rendimiento—, aunque se hable como si fuera “tasa de descuento”, pero no es tal.

[2] Como *clasificación de proyectos mutuamente excluyentes* se conoce a los proyectos cuya aceptación implica la exclusión de cualquier otra alternativa aun cuando sean aceptables. Para información sobre la clasificación completa, los llamados proyectos independientes y contingentes, véase Moyer, R. Charles, McGuigan, James R. y Kretlow William J., *Administración financiera contemporánea*, International Thomson Editores, México, 1998.

[3] Los proyectos de inversión que exhiben un patrón convencional de flujos de efectivo presentan un fuerte flujo de salida al inicio y/o al final de su vida. Los proyectos de inversión con patrones no convencionales de flujos de efectivo son los que presentan salidas de efectivo en uno o más periodos al inicio de la vida del proyecto, seguidos de entradas de efectivo durante el tiempo restante.

únicas o múltiples, respectivamente; si éste es el caso, debe recurrirse a un método de aproximaciones sucesivas como el de interpolación lineal, visto en el capítulo 5; el no disponer de fuentes que expliquen este método para el cálculo de la TIR, limita fuertemente al estudioso de la evaluación de proyectos de inversión.[4]

7.1 Método del valor presente neto (VPN)

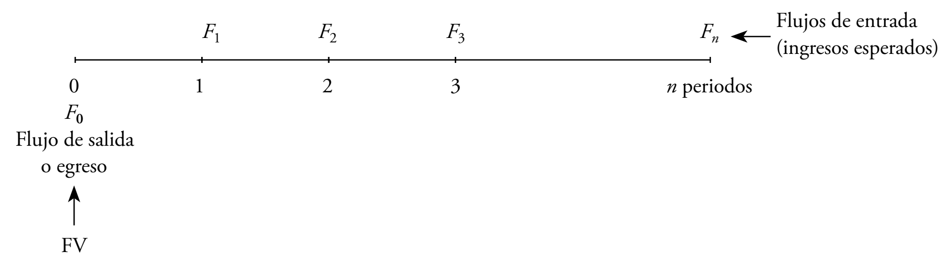
El VPN de un proyecto de inversión es la diferencia entre el valor presente de los flujos de efectivo y la inversión inicial calculada con la tasa que se debe pagar por el financiamiento:

$$\boxed{\text{VPN} = \text{Valor presente de los flujos de efectivo} - \text{Inversión inicial}} \qquad [7.1]$$

Los flujos de efectivo se descuentan con la tasa de rendimiento que la compañía paga por el financiamiento, es decir, el costo del capital en el que incurre la empresa.

Sea F_t: Flujo de efectivo esperado por un proyecto de inversión en el periodo t.
i: Tasa interna de rendimiento del proyecto.
I_0: Inversión inicial o costo del proyecto.
n: Número de periodos de tiempo en los cuales ocurren los flujos F_t.

En el siguiente diagrama se ubican ambas obligaciones del proyecto (los flujos de entrada y de salida); se supone que sólo existe el costo inicial o descuento único y los sucesivos flujos de ingreso. No necesariamente existe en cada punto en el tiempo algún ingreso:



[4] Sin ánimo exhaustivo se citan las siguientes obras que hacen referencia a la TIR, pero no a la técnica para obtenerla: Charles Moyer *et al.*, *op. cit.*; J. Fred Weston y Eugene F. Brigham, *Fundamentos de administración financiera*, McGraw-Hill Interamericana, México, 2001; Stephen A. Ross y Jaffrey Randolph W. Jaffe, *Finanzas corporativas*, Irwin-McGraw-Hill, México, 1996.

Obsérvese que los flujos de efectivo (o pagos) se efectúan al final del periodo; esto es una convención en el análisis de flujos de efectivo y así debe suponerse a menos que claramente se especifique de otra forma.

Con base en la definición del VAN (o VPN) señalada en la expresión [7.1]:

$$VPN = F_1(1+i)^{-1} + F_1(1+i)^{-2} + \ldots + F_n(1+i)^{-n} - F_0 \qquad [7.2]$$

Si I_0 es el valor de la inversión (o desembolso inicial), es decir $F_0 = I_0$, la expresión anterior se convierte en:[5]

$$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t} - I_0 \qquad [7.3]$$

El criterio para decidir respecto a la elección del proyecto es:

Si $VPN \geq 0$	Aceptar el proyecto	
Si $VPN < 0$	No aceptar el proyecto	[7.4]

Si el VPN (o VAN) de un proyecto es positivo, se interpretará como un aumento en la riqueza de la compañía; es decir, el valor de la empresa se incrementa en una cantidad igual al importe del VPN. Si el VPN es cero, significa que los flujos de efectivo del proyecto son suficientes para recuperar la inversión realizada.

Con este método se entiende que la tasa de rendimiento mínima es aquella con la que los inversionistas obtendrán beneficios siempre y cuando los flujos de efectivo se reinviertan con dicha tasa, que es con la que se obtuvo el financiamiento, es decir, el costo de capital.

Ejemplo 1

Una empresa tiene una alternativa de inversión: un proyecto consiste en adquirir maquinaria en \$6000000 con la que se espera mejorar el proceso de producción; el segundo proyecto le significa a la empresa un desembolso de \$8000000, con lo que podrá reemplazar toda la maquinaria utilizada en la producción. Para cualquier proyecto se usará financiamiento al 22% anual.

[5] La expresión [7.4] también puede representarse como $VPN = \sum_{t=1}^{n} F_t(1+i)^{-t} - I_0$.

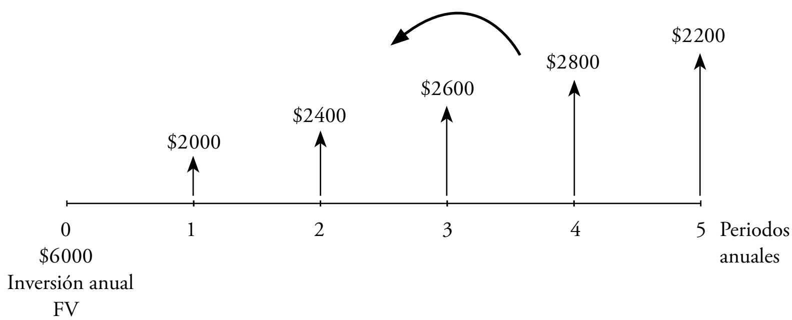
Los flujos futuros de efectivo esperados para ambos proyectos son los siguientes:[6]

Periodo (años)	Flujos de efectivo Proyectos	
	A	B
0	– $6000	– $8000
1	2000	1100
2	2400	1800
3	2600	2500
4	2800	3800
5	2200	4400

¿Cuál proyecto debe seleccionarse, de tal forma que la empresa obtenga la mayor rentabilidad?

Los flujos de efectivo y su valor presente neto para cada proyecto son:

Proyecto A:

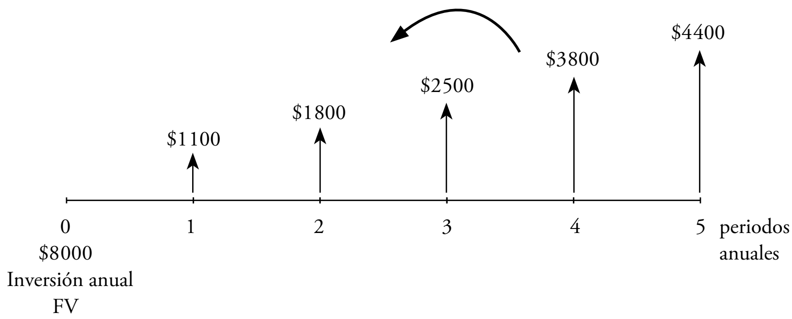


El valor presente neto del proyecto A es, de acuerdo con la expresión [7.3]:

$$VPN = 2000(1+0.22)^{-1} + 2400(1+0.22)^{-2} + 2600(1+0.22)^{-3} + 2800(1+0.22)^{-4} + 2200(1+0.22)^{-5} - 6000 = 761.567 \text{ mdp.} \qquad [7.5]$$

[6] Las cifras se expresan en miles de pesos (mdp).

Proyecto B:



$$VPN = 1100\,(1 + 0.22)^{-1} + 1800\,(1 + 0.22)^{-2} + 2500\,(1 + 0.22)^{-3} + 3800\,(1 + 0.22)^{-4} + 4400\,(1 + 0.22)^{-5} - 8000 = 1168.93 \text{ mdp.} \qquad [7.6]$$

El valor presente neto del proyecto A resultó positivo, con ello se deduce que generaría más efectivo del necesario para reembolsar la deuda y proporcionar rendimientos a los accionistas. El valor presente neto del segundo proyecto fue negativo, por lo cual no se cumpliría con lo mencionado y por lo tanto, en este caso, la mejor decisión sería aceptar el proyecto de inversión A porque es razonable esperar que contribuya en el incremento de la riqueza de la compañía en $761567; mientras que el proyecto B produciría pérdidas.

A continuación se empleará otro criterio de decisión para seleccionar proyectos de inversión; en él se expresará en términos porcentuales la magnitud del cambio en la riqueza de la compañía.

7.2 Método de la tasa interna de rendimiento (TIR)

La tasa interna de rendimiento (o retorno) es la tasa de rendimiento que la empresa espera obtener si decide llevar a cabo el proyecto. También se define como la tasa que iguala a cero la diferencia de los valores presente de los ingresos esperados y de sus costos; o bien se le puede interpretar como la tasa de rendimiento con la que el valor presente neto es igual a cero. Esto significa que la expresión [7.3] se convierte en:

$$0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1 + i)^t} - I_0 \qquad [7.7]$$

$$I_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1 + i)^t} \qquad [7.8]$$

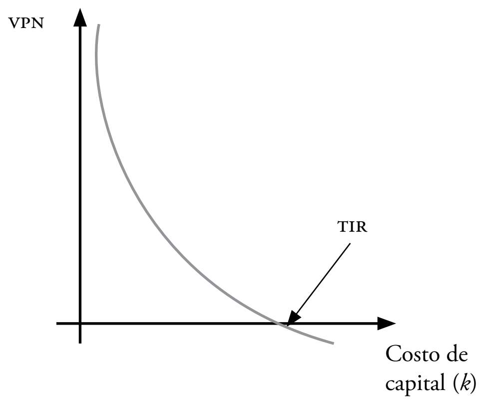
Para decidir si el proyecto se acepta por su rentabilidad, se debe comparar la TIR con la tasa de costo de los fondos que se emplearon para financiar el proyecto; supóngase ésta como k, es decir, el costo de capital.

Si la TIR	$\geq$	Costo de capital (k), acéptese el proyecto
Si la TIR	$<$	Costo de capital (k), no se acepte

Debido a que los flujos futuros de entrada son *estimados*, la TIR del proyecto se interpreta como una *tasa esperada de rendimiento*; si ésta es mayor o igual que el costo de capital k, se genera un superávit después de que se hubiese pagado el capital empleado para financiar el proyecto; la empresa tiene la oportunidad de reinvertir sus flujos de efectivo según la TIR del proyecto; de ahí que la decisión sería aceptar el proyecto y rechazarlo en caso contrario.

Para encontrar la TIR bastaría con calcular la solución del polinomio en la expresión [7.2]. Gráficamente la TIR se ubica en el punto en que se intercepta la curva del valor presente neto con el eje de las abscisas:

Gráfica 7.1
Perfil del VPN cuando existe un fuerte desembolso inicial

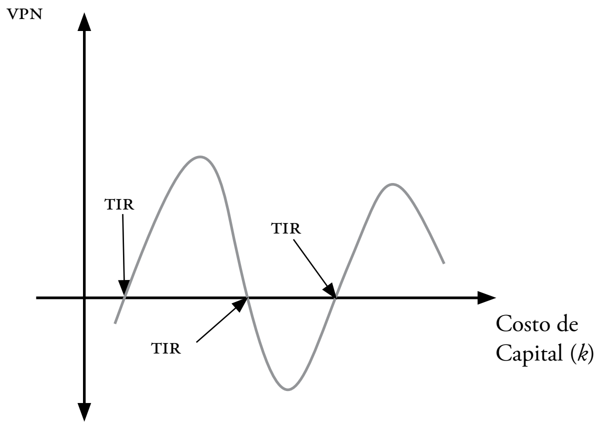


Debe observarse que el polinomio en la expresión [7.2] es de grado n, por lo tanto posee n raíces diferentes[7] (o también llamadas *soluciones del polinomio*), algunas de ellas son imaginarias; lo anterior significa que cuando se desea evaluar la rentabilidad de un proyecto de inversión mediante el cálculo y la comparación de la TIR, se puede

[7] La expresión [7.2] tiene la forma polinomial $F_1 x + F_2 x^2 + + F_3 x^3 + \ldots + F_n x^n = 0$.

llegar a más de un valor para la tasa buscada. Gráficamente significa que el valor presente neto de los flujos (de entrada y salida) cruza varias veces el eje de las abscisas, de ahí la multiplicidad de raíces.

Gráfica 7.2
Perfil del VPN cuando existe más de un desembolso inicial



Se observa que el perfil del valor presente neto es tal que cruza más de dos veces al eje de las abscisas; es decir, existen tres tasas internas de rendimiento para el proyecto que satisfacen la ecuación [7.7], sin embargo la TIR correcta es la que excede al costo de capital.

La posibilidad de encontrar múltiples valores (reales o imaginarios) para la TIR se presenta cuando hay interrupción en la dirección de los flujos del proyecto, esto es, cuando se produce más de un egreso en periodos no consecutivos durante la vida del proyecto. Si este es el caso, es más difícil elegir el mejor proyecto de inversión mediante la aplicación del criterio de la TIR.

A continuación se aplica esta técnica para resolver el ejemplo mostrado al aplicar el VPN.

El valor presente neto de los flujos de entrada y salida de TIR, *i*, para cada proyecto es, según la expresión [7.2] y a partir de los datos del cuadro 7.1:

Proyecto A

$$2\,000(1+i_A)^{-1}+2\,400(1+i_A)^{-2}+2\,600(1+i_A)^{-3}+2\,800(1+i_A)^{-4}+2\,200(1+i_A)^{-5}-6\,000=0 \quad [7.9]$$

Proyecto B

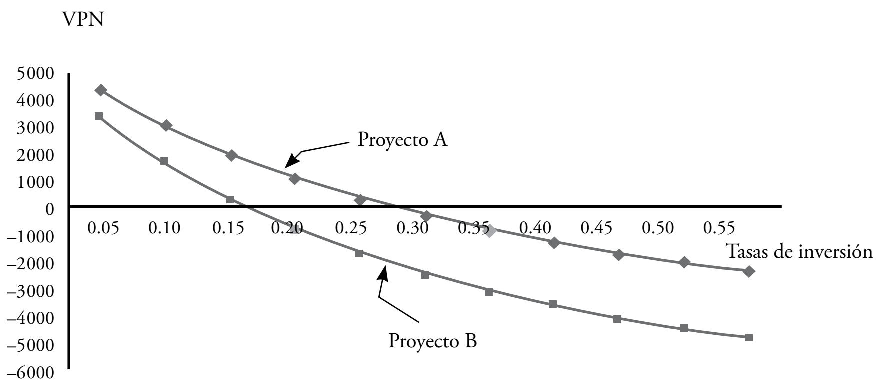
$$1\,100(1+i_B)^{-1}+1\,800(1+i_B)^{-2}+2\,500(1+i_B)^{-3}+3\,800(1+i_B)^{-4}+4\,400(1+i_A)^{-5}-8\,000=0 \quad [7.10]$$

El cálculo del VPN y de su perfil aparecen en el cuadro 7.1 y la gráfica 7.3, respectivamente.

Cuadro 7.1
VPN para los proyectos A y B con diferentes tasas de interés

Tasa de rendimiento	Valor presente neto Proyectos	
	A	B
5%	$ 4354.93	$ 3413.65
10%	3033.54	1693.40
15%	1958.12	321.61
20%	1072.40	–785.75
25%	334.98	–1689.73
30%	–285.11	–2435.31
35%	–811.28	–3056.11
40%	–1261.50	–3577.56
45%	–1649.71	–4019.13
50%	–1986.83	–4395.88
55%	–2281.52	–4719.60

Gráfica 7.3
Perfil del VPN para los proyectos de inversión A y B



La TIR de cada proyecto, o tasa de rendimiento que descuenta los flujos de efectivo para cada proyecto, es la raíz del polinomio expresado en la expresión [7.9] y [7.10]; gráficamente es el punto de intersección de la curva del valor presente neto de los flujos de entrada y salida con el eje de las abscisas; en la gráfica 7.3 se observa que la TIR para el proyecto A debe estar entre 25 y 30%, mientras que para el B entre 15 y 20% aproximadamente. En el ejemplo, es obvio que el mejor proyecto es el A —decisión que también debería adoptarse con base en la magnitud del valor presente neto—; sin embargo, para conocer con una mayor exactitud los valores correspondientes, se empleará un método de aproximaciones sucesivas que supone una relación lineal entre la tasa de rendimiento y el valor presente neto; a éste se le conoce como *método de interpolación lineal*. El método proporciona un valor muy cercano a la tasa interna de rendimiento que produce que las expresiones [7.9] y [7.10] se aproximen a cero con un nivel de error de diezmilésimos de punto. Una vez calculadas ambas tasas, se aplicará la regla de decisión para seleccionar aquel proyecto que sea más rentable para la compañía.

Únicamente se ilustra la interpolación para el proyecto A; el lector puede hacer lo mismo para el proyecto B.

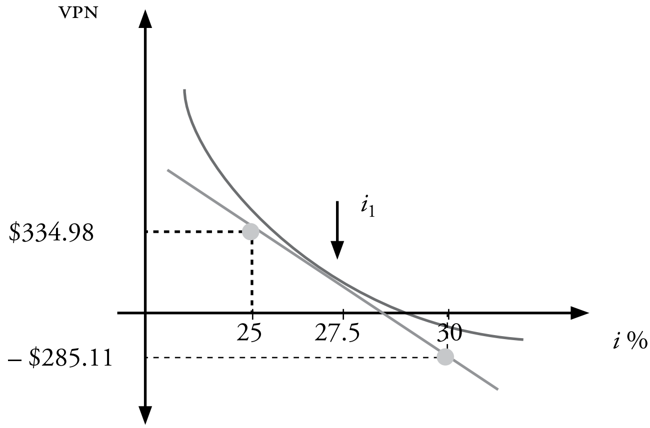
Para encontrar la tasa interna de rendimiento del proyecto A, puede interpolarse linealmente con las tasas de 25 y 30% puesto que la gráfica señala que ése es el intervalo donde se encuentra la TIR.

Como dos puntos están sobre la recta, P_1 (0.25, 334.98), P_2 (0.30, –285.11), y un tercero bajo la suposición de linealidad, el punto P_3 (i, 0) está en la abscisa, se calculan e igualan dos pendientes con esos puntos (se debe cuidar que sólo se emplee una vez el punto cuya abscisa contiene a la TIR buscada) y se despeja la tasa interna de rendimiento del proyecto.[8]

Los valores del VPN que acotan a la TIR del proyecto A, según el cuadro 7.2, son los generados por las tasas de 25 y 30%, respectivamente; la gráfica 7.4 muestra el enfoque del método de interpolación lineal.

[8] Recuerde que la pendiente de una recta es la misma para cualquier pareja de puntos que estén sobre ella.

Gráfica 7.4
Interpolación lineal
para el cálculo de la TIR del ejemplo 1



$$\text{Por lo tanto} = \frac{-285.11 - 334.98}{0.30 - 0.25} = \frac{0 - 334.98}{i_1 - 0.25}$$

i = 0.2759 La TIR es de 27.5% anual.

La TIR para el proyecto B se encuentra entre 15 y 20%, respectivamente; ésta se encuentra con la igualación de pendientes.

$$\frac{-785.75 - 321.61}{0.15 - 0.20} = \frac{0 - 321.61}{i_1 - 0.20}$$

Por lo tanto la TIR del proyecto B es de 16.347%; como la regla de decisión es elegir el proyecto cuyo TIR sea más grande que el costo de capital, en este caso de 22%, debe elegirse el proyecto A.

Ejemplo 2

Analice el perfil del VPN de los siguientes dos proyectos de inversión cuya vida es de 5 años cada uno y la tasa de financiamiento de 6% anual. Véase el siguiente cuadro.[9]

[9] Obsérvese que debió calcularse el VPN a partir de la ecuación [7.2] o [7.3].

Valor presente neto

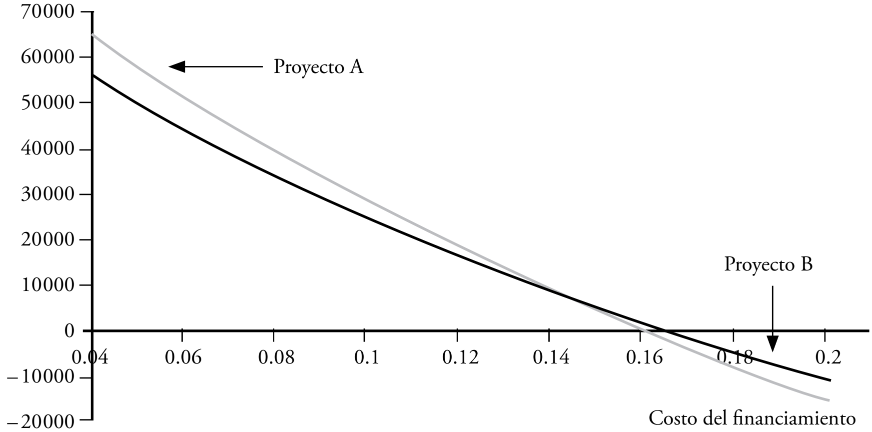
Tasa de rendimiento*	Proyectos A	Proyectos B
4%	64 850.23	5 579
5%	58 121.22	49 778
6%	51 680.01	44 083
7%	45 510.86	38 689
8%	39 599.05	33 580
9%	33 930.82	28 737
10%	28 493.27	24 147
11%	23 274.34	19 794
12%	18 262.69	15 665
13%	13 447.72	11 747
14%	8 819.45	8 028
15%	4 368.53	4 498
16%	86.15	1 146
17%	−4 035.96	−2 037
18%	−8 005.69	−5 062
19%	−11 830.08	−8 612
20%	−15 516.33	−10667

* Con ellas se descuentan los flujos al emplear la expresión [7.3].

Solución

Si se grafica el VPN, se aprecia mejor su comportamiento a diferentes tasas de interés con las que se descuentan los flujos de efectivo. El punto en el que cruzan las curvas del VPN de cada proyecto con el eje de las abscisas, es la solución de las respectivas ecuaciones VPN = 0; por lo tanto, con una simple observación de la gráfica 7.5, se verá que la TIR de ambos proyectos está situada entre 16 y 17%, respectivamente. Cualquiera que sea el valor exacto de la TIR, supera ampliamente el costo de financiamiento de 6%; ambos proyectos son rentables.

Gráfica 7.5
Perfil del VPN para los proyectos de inversión del ejemplo 2



Para seleccionar el proyecto con base en el criterio de decisión basado en la TIR, ésta debe superar a la tasa de costo de los fondos (en este caso de 6%); ambos proyectos son rentables.

No obstante estos valores, si se sabe que el costo del financiamiento es de 6%, ¿son rentables los proyectos?

Como el valor presente de todos los flujos de efectivo descontados al 6% son positivos, \$51680 y \$40083 para los proyectos A y B, respectivamente, ambos proyectos también son rentables a la luz de este criterio de decisión.

Por otro lado, en la gráfica se observa que a tasas bajas, el proyecto A tiene un VPN más alto, y cuando la tasa rebasa 16%, el proyecto B lo supera; ¿cuál será la tasa de financiamiento que haría que ambos proyectos fuesen igual de atractivos?, es decir, ¿cuál es el punto de *indiferencia*?

Si se igualan las respectivas ecuaciones del VPN y se resuelve para i, se encontrará ese punto; en la siguiente expresión, F_t^A y F_t^B son los flujos de cada proyecto:[10]

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{F_t^A}{(1+i)^t} - I_0^A = \sum_{t=1}^{5} \frac{F_t^B}{(1+i)^t} - I_0^B$$

[10] Esta comparación se puede hacer porque ambos proyectos tienen la misma duración.

Para resolver esta situación, se iguala a cero:

$$\sum_{t=1}^{5} \frac{F_t^A}{(1+i)^t} - I_0^A - \left(\sum_{t=1}^{5} \frac{F_t^B}{(1+i)^t} - I_0^B \right) = 0$$

¿No es esta la definición de TIR? Si se resolviera esta ecuación, se encontraría esa *tasa de indiferencia* en la que ninguno de los dos proyectos es mejor que otro, porque ambos son igualmente atractivos desde el punto de vista financiero.

Por último, debe señalarse que los métodos del VPN y TIR producen los mismos resultados (aceptación o rechazo) para el caso de proyectos independientes;[11] no ocurre siempre así en el caso de proyectos mutuamente excluyentes. Se recomienda en esta situación guiarse por el criterio del VPN.

El enfoque del VPN supone flujos de efectivo que pueden ser reinvertidos al costo del capital, mientras que el enfoque de la TIR supone que la reinversión se realiza (por lo general) a una tasa interna de rendimiento mayor. También debe destacarse que ambos enfoques suponen flujos futuros *esperados*, de ahí que la precisión en su estimación influya grandemente al emplear las técnicas vistas para seleccionar proyectos de inversión.

[11] Los proyectos independientes son aquellos en los que los flujos de efectivo no se ven afectados por las decisiones que se toman en otros proyectos.

Ejercicios propuestos

1. La empresa Torres, S. A. desea participar en la licitación de un contrato del que se esperan los siguientes flujos de efectivo netos después de impuestos al final de cada año:

Año	Flujo de efectivo neto
1	5000
2	10000
3	12000
4	−4000
5	8000
6	6000
7	2500
8	−1700

   Para obtener dicho contrato, la empresa debe gastar $15000 en el mantenimiento de la maquinaria. La compañía puede invertir su dinero y mantener un rendimiento anual de 12%: a) calcule el valor presente neto del proyecto, b) calcule la tasa interna de rendimiento, c) ¿es aceptable este proyecto?
   Sol.: a) $11458.99, b) 37.77%, c) sí es aceptable este proyecto.
2. a) ¿Cuál sería la tasa interna de rendimiento (TIR) para una inversión de $93000 con los dos siguientes flujos alternativos de efectivo comparables con un rendimiento anual de 15%? y b) ¿qué alternativa resulta más conveniente para la empresa de acuerdo al VPN?

Alternativa	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
x	25000	37000	20000	32000	39000
y	20000	30000	27000	37000	42000

   Sol.: a) 18.22% para la alternativa "x" y 17.74% para la alternativa "y", b) la alternativa "x" es la mejor porque genera más ganancias (VPN x = $7553 y VPN y = $6865).

3. Una compañía analiza la inversión en una nueva línea de máquinas comerciales. El desembolso inicial requerido es de $35 millones; el costo de capital es del 18% anual. Los flujos de efectivo esperados son los siguientes:

Año	Flujo de efectivo neto
1	5000000
2	8000000
3	5000000
4	6000000
5	9000000
6	8000000
7	4000000

a) Calcular el valor presente neto, b) calcule la TIR, c) calcule el índice de rentabilidad del proyecto.

Sol.: a) – $10’726,213.00, b) 6.30%, c) 0.69.

4. A la empresa G2, S. A., le ofrecen un préstamo al 18% convertible anualmente para financiar la compra de una máquina nueva de impresión cuyo precio es de $90000 y se estima que producirá los siguientes ahorros en los próximos siete años:

Final de año	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6	Año 7
Ahorros	40000	36000	32000	28000	24000	16000	20000

a) ¿Cuál es el VNP?, b) ¿Cuál es la TIR?

Sol.: a) $26,367, b) 29.67%

5. Calcular la tasa interna de retorno (TIR) para una inversión de $180,000 con los siguientes flujos de efectivo:

Año	Alternativa A	Alternativa B
1	70000	80000
2	40000	60 000
3	50000	20000
4	60000	90000

Sol.: 8.83% y 14.87% para las alternativas A y B, respectivamente.

6. Una compañía desea participar en la licitación de un contrato del que se esperan los siguientes flujos de efectivo netos después de impuestos al final de cada año.

Año	Flujo de efectivo neto
1	$60,000
2	$90,000
3	$70,000
4	$90,000
5	$80,000
6	$60,000
7	$90,000
8	– $20,000

Para obtener el contrato, la compañía debe gastar $400,000 en la mecanización de su planta. Esta mecanización carecerá de valor de rescate al cabo de 8 años. La compañía dispone de alternativas de inversión comparables con un rendimiento anual compuesto de 15%. El incentivo fiscal derivado de la depreciación de la mecanización se refleja en los flujos de efectivo netos que aparecen en la tabla: a) ¿cuál es el valor presente neto del proyecto?, b) ¿el proyecto es aceptable?

Sol.: a) $ – 89,279, b) no es aceptable el proyecto.

7. Una compañía aseguradora debe escoger entre dos inversiones; cada una costaría $15000 y produciría los siguientes flujos de efectivo al final de cada año:

Año	1	2	3	4	5
Proyecto A	1000	2000	3000	4000	5000
Proyecto B	6000	5000	4000	3000	2000

a) Calcular el VPN para cada proyecto a una tasa de 10% anual, b) calcular la TIR para cada proyecto.

Sol.: a) $VPN_A = -\$4{,}357 \ y \ VPN_b = \$882 \quad b) \ y \ TIR_B = cero \ (0) \ y \ TIR_B = 12.75\%$

Conviene recordar

1. Cuando se habla de *tasa de descuento* en los proyectos de inversión en realidad se habla de una *tasa de interés* con la que se *descuentan* los flujos de efectivo; quizá esto haya provocado el uso generalizado del término y erróneo desde el punto de vista formal.

2. La tasa interna de rendimiento es una medida estadística a la que todo administrador recurre para justificar su requerimiento de fondos o cuando desea conocer las bondades de un proyecto; como no se considera la tasa de interés del mercado sino sólo la cantidad y secuencia del flujo de efectivo respecto al costo del proyecto, de ahí la palabra *interna*.

3. La TIR es la tasa de interés con la que se asume se reinvertirán los flujos esperados de ingresos; si fuese inferior, entonces la TIR resultante también sería inferior a la estimada inicialmente.

4. Si hubiera necesidad de más desembolsos durante la vida del proyecto, es probable que la ecuación para el cálculo de la TIR tuviese múltiples soluciones —o multiplicidad de raíces, incluso imaginarias— y debiera recurrirse a métodos más sofisticados de matemáticas avanzadas para encontrar las raíces reales que interesan.

Se recomienda siempre graficar el perfil del VPN del proyecto y seleccionar sólo los puntos que cruzan a la abscisa para emplear la interpolación lineal vista en el capítulo 5.

5. La técnica del VPN considera la tasa de descuento (de interés) del mercado y sí afecta la decisión final al seleccionar un proyecto.

6. El valor resultante del cálculo del VPN es una cantidad en dinero que puede ser positiva o negativa.

Fórmulas financieras

Valor presente neto (VPN) con flujos de efectivos consecutivos

Básica

$$VPN = F_1(1+i)^{-1} + F_1(1+i)^{-2} + \ldots + F_n(1+i)^{-n} - I_0$$

o también

Básica

$$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t} - I_0$$

Para calcular la TIR (empleando interpolación lineal)

Básica

$$0 = F_1(1+i)^{-1} + F_1(1+i)^{-2} + \ldots + F_n(1+i)^{-n} - I_0$$

Nota: no se recomienda recordar ninguna expresión en particular; el lector debe ser capaz de plantear la ecuación de valor respectiva y resolverla algebraicamente para obtener la variable requerida.

La recomendación obedece a que los flujos de efectivo pueden tener patrones convencionales (en cuyo caso sí se podrían utilizar las expresiones algebraicas de este capítulo) o patrones no convencionales (en cuyo caso no sería posible).

Capítulo 8
Bonos

Introducción

Cuando las empresas o los gobiernos necesitan financiar sus proyectos más allá de la cantidad que les permiten sus presupuestos anuales, recurren a préstamos para hacerse de fondos. Si deciden endeudarse en el largo plazo con el público inversionista, se obligan a compartir las ganancias futuras de la empresa o de la entidad gubernamental. El instrumento que emplean esas entidades para allegarse de recursos del público inversionista se denomina *bono*.

Un bono representa para el emisor la obligación de pagar en el largo plazo el capital prestado en una fecha específica y además pagar intereses periódicos durante la vida del bono hasta la fecha de su vencimiento.

El objetivo de este capítulo es aplicar la teoría de anualidades a títulos de deuda —series de obligaciones— emitidas por empresas privadas y por el gobierno para calcular el precio de compra-venta e identificar si el bono se compró con prima o con descuento.

> **Definiciones de *bono***
>
> Obligación financiera (certificado de deuda) o promesa de pago futuro documentado en un papel y que determina el monto, plazo, moneda y sucesión de pagos.
>
> Títulos de deuda emitidos por una empresa o por un Estado; en ellos se especifica el monto a devolver en un determinado plazo, así como las amortizaciones, los intereses periódicos y otras obligaciones del emisor.

8.1 Valores importantes que aparecen en la carátula de un bono

Un bono especifica en su carátula las siguientes variables:

i) El valor nominal (llamado *denominación* o *valor de carátula*), que es la cantidad de dinero que se pagará en su vencimiento; generalmente es un valor múltiplo de 100 unidades monetarias.
ii) La *fecha de maduración*, o fecha de vencimiento, en la que se devolverá al inversionista el capital que prestó a la entidad que emitió los bonos.
iii) La tasa de rendimiento periódico del bono (o *tasa cupón*), que se paga a lo largo de la vida del bono; esta tasa cupón es la tasa garantizada por el emisor para el pago de intereses, también llamados *dividendos*.
iv) El *valor de redención*, que es la cantidad que promete pagar el emisor al inversionista en la fecha de redención del bono.

A manera de ejemplo, véase la figura 8.3.

La tasa de retorno (tasa *yield*) que se obtiene del bono basado en el precio que se pagó y el pago de intereses que se reciben desde la compra, más el valor de redención (o valor al vencimiento) puede ser menor o mayor al precio de compra del bono.[1]

Cuando un inversionista compra un bono, le está prestando dinero a una empresa, a un gobierno o a una entidad gubernamental, llamados *emisores* del bono.

En retorno a este préstamo el emisor promete pagarle al inversionista una tasa de interés durante la vida del bono para que el capital sea reinvertido a esa tasa mientras llega la fecha de vencimiento (*maduración*); el banco se constituye en una fuente confiable de ingresos fijos para el inversionista (véase figura 8.1).

Si el inversionista compra el bono en la fecha de emisión, puede comprarlo con un valor cercano o igual al valor nominal y puede conservarlo o no hasta la fecha de vencimiento; si no lo conservara, podría venderlo al precio negociado en el mercado. El precio depende de qué tan atractiva sea la tasa de rendimiento del bono: si paga altos dividendos resulta muy atractiva para el inversionista y provocará que el precio del bono aumente y se pague con una *prima*; si el pago de dividendos es bajo, puede no ser atractiva esta inversión, de tal manera que su precio baje y se venda a *descuento* (véanse las relaciones expresadas en [8.3] y [8.4]).

[1] Se dice que básicamente hay dos tipos de *yield* para bonos: *yield ordinario* y *yield de maduración*. El tipo que se empleará en este documento es el de maduración porque permite comparar bonos con diferente *tasa cupón* y fecha de vencimiento.

Si el bono se vende a un precio superior al de su valor nominal, se dice que se vende *sobre par*; si se vende a un precio inferior, se dice que se vende *bajo par*; si se vende al mismo precio que su valor nominal, se dice que se vende *a la par*.

Si el inversionista paga una cantidad inferior, igual o superior a la que recibirá en la fecha de vencimiento de la obligación, ¿contradice la suposición de que el dinero siempre debe estar produciendo más dinero en el tiempo? La respuesta es no, porque el emisor garantiza, además, el pago de intereses periódicos durante toda la vida del bono a una tasa que especifica en el documento, la *tasa cupón*; esta garantía de ingreso futuro resulta atractiva financieramente para los planes de retiro de los trabajadores porque la maduración del bono es de largo plazo: hasta 5 años, desde 5 y hasta 10, o entre 10 y 30 años. En el cuadro 8.1 se resumen las principales características de algunos bonos emitidos en México por el gobierno federal y algunas entidades gubernamentales. No pretende ser un listado exhaustivo.

8.2 Precio de compra de bonos redimibles al vencimiento

El precio de compra-venta de los bonos u obligaciones que se calcularán en este capítulo es el que se refiere a los bonos que se redimen hasta su fecha de vencimiento. Existen algunos bonos que pueden pagarse (o redimirse) antes de su fecha de vencimiento. Si este es el caso y se ejerce el derecho, se le devolverá al inversionista su inversión inicial más los intereses generados hasta ese momento, sin pagar los intereses futuros que se hubiesen ganado de no haberse ejercido.

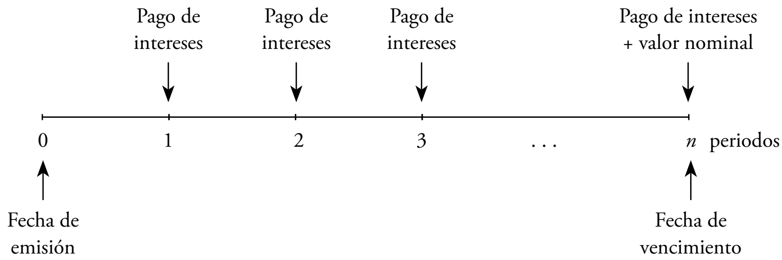
La notación empleada para valuar el precio de un bono es la siguiente:

- r: Tasa cupón o tasa de intereses.
- F: Valor nominal o valor de carátula.
- i: Tasa de rendimiento o inversión (yield).
- C: Valor al vencimiento.
- n: Periodos para redimir el bono.

En el siguiente diagrama se muestran las obligaciones de este instrumento (se ejemplifica el caso más general donde el plazo se expresa en periodos unitarios de tiempo y el pago de intereses también).[2]

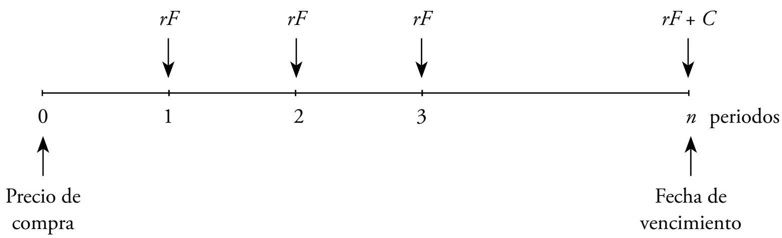
[2] Generalmente el pago de dividendos es semestral y fijo durante la vida del bono, por lo que se dice que se pagan a una tasa simple de interés. Se calculan sobre el valor nominal.

Figura 8.1



Si se emplea la notación descrita, el diagrama [8.1] representa en forma general las obligaciones del emisor y del comprador del bono.

Figura 8.2



Para establecer el precio de compra del bono, se utiliza una ecuación de valor y se evalúan los flujos en el momento de la compra:

$$PC = rF(1+i)^{-1} + rF(1+i)^{-2} + \ldots + rF(1+i)^{-n} + C(1+i)^{-n}$$

$$PC = rF\underbrace{[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n}]}_{\text{Valor presente de los intereses}} + \underbrace{C(1+i)^{-n}}_{\text{Valor presente del valor nominal}} \qquad [8.1]$$

Si se desea emplear la suma de los primeros términos de una serie en progresión geométrica, véase la expresión [5.1] del capítulo 5, el precio de compra puede reexpresarse como:

$$PC = rF\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + C(1+i)^{-n} \qquad [8.2]$$

Una vez calculado el precio de compra del bono, podrá saberse si se compró a descuento o con una prima.

a) Si precio de compra – valor nominal > 0 ⇒ el bono es con prima b) Si precio de compra – valor nominal < 0 ⇒ el bono es a descuento	[8.3]

Las dos relaciones *a* y *b* se pueden expresar como sigue para obtener siempre cantidades positivas:

a) Prima = precio de compra – valor nominal b)Descuento = valor nominal – precio de compra	[8.4]

La prima puede pensarse como un número positivo y el descuento como negativo, es decir:

$$-\,Prima = Descuento$$

En los siguientes ejemplos se deja al lector la opción de emplear la suma S_n de los primeros n términos de una serie geométrica, vista en la expresión [5.1] dentro del recuadro en el capítulo 5.

Ejemplo 1

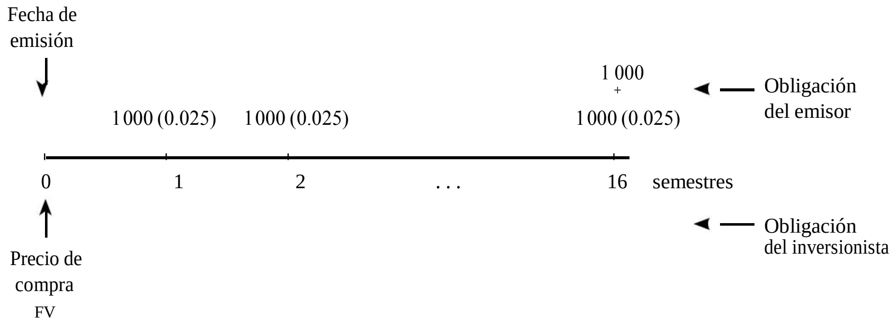
Encontrar el precio de compra de un bono de $1000 con dividendos al 5% pagaderos semestralmente, redimible a la par en 8 años. La tasa de inversión que el comprador desea obtener en la operación es de 6% anual convertible semestralmente.

Solución

Como el inversionista desea una tasa de retorno de su inversión específica, el precio que estaría dispuesto a pagar en la fecha de emisión es igual al valor descontado de los intereses (n cupones) más el valor descontado del valor al vencimiento (o valor nominal).

Los dividendos semestrales se calculan sobre el valor nominal y son fijos durante la vida del bono. La tasa efectiva semestral es de $\frac{0.05}{2}$, al ser redimible a la par se entiende que el valor sería igual al valor nominal, $1000. A partir del diagrama de la figura 8.1

se puede ver la analogía con este caso en particular. Las obligaciones del emisor y del inversionista se muestran a continuación:



La tasa efectiva semestral de inversión es de $\frac{0.06}{2}$

Al establecer la ecuación de valor para calcular el precio de compra del bono en la fecha de emisión se obtiene:

$$PC = 1{,}000(0.025)\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{-1} + 1{,}000(0.025)\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{-2} + \ldots + 1{,}000(0.025)\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{-16} \; 1{,}000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{-16}$$

$$PC = 1{,}000(0.025)\left[\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{-1} + \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{-2} + \ldots + \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{-16}\right] + 1{,}000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{-16}$$

PC = \$937.20

Como el bono se compra a un precio inferior a su valor al vencimiento (\$1 000), se dice que se compra *a descuento*; a partir de [8.3] el importe del descuento es:

Descuento = Valor nominal – PC
Descuento = \$1 000 – \$937.20
Descuento = \$62.50

Ejemplo 2

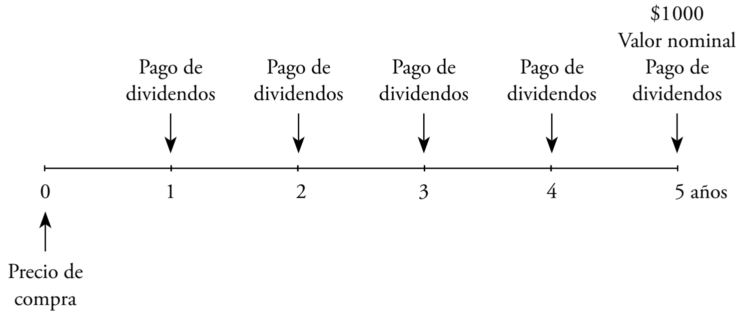
Una empresa ha emitido 10000 bonos por un valor nominal de \$1 000 cada uno. Los bancos pagan un cupón de 5% y vencen a 5 años, ¿cuál es el precio de compra del bono en la fecha de emisión si se descuentan con una tasa de interés de 10%?

El pago de dividendos se efectúa al final de cada año y se calcula sobre el valor no-minal.

Solución

Se calculará el precio de compra unitario y a partir de ahí se calculará el precio de compra por el total de los bonos.

La tasa de retorno de la inversión (r) es de 10% y la tasa cupón o de interés (i) es de 5%. En el siguiente diagrama se exhiben las obligaciones de las partes:



$$PC = \frac{dividendos}{(1+r)^1} + \frac{dividendos}{(1+r)^2} + \frac{dividendos}{(1+r)^3} + \frac{dividendos}{(1+r)^4} + \frac{VN}{(1+r)^n}$$

$$PC = dividendos\,(1+r)^{-1} + dividendos\,(1+r)^{-2} + \ldots + dividendos\,(1+r)^{-5} + VN(1+r)^{-n}$$

Obsérvese la expresión anterior que corresponde exactamente a la expresión [8.1]; sustituyendo los valores respectivos:

$$PC = \underbrace{50\,(1+0.10)^{-1} + 50\,(1+0.10)^{-2} + 50\,(1+0.10)^{-3} + 50\,(1+0.10)^{-4} + 50\,(1+0.10)^{-5}}_{\text{Valor presente de los dividendos}} + \underbrace{1000\,(1+0.10)^{-5}}_{\text{Valor presente del valor nominal}}$$

$$PC = \$189.5393385 + \$620.921323$$

$PC = \$810.460662$ Precio de compra unitario del bono

Por lo tanto, el precio a pagar por los 10000 bonos es de $8104606.62.

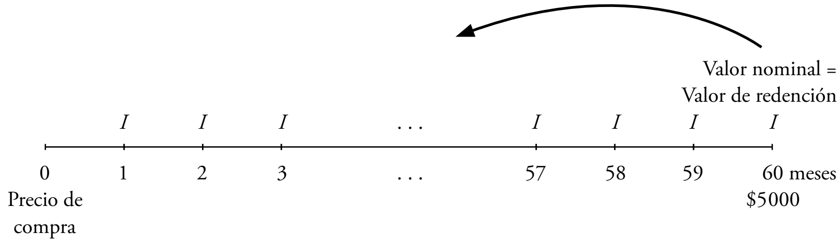
Ejemplo 3

El señor Romo desea ganar 18.5% de interés capitalizable cada mes de una inversión. ¿Cuánto deberá pagar hoy por una obligación que tiene un valor nominal de $5000, si paga intereses mensuales a una tasa de 15% anual y su redención[3] será a la par dentro de 5 años?

Solución

Al comprar la obligación el señor Romo adquiere el derecho de recibir el pago mensual de los intereses (I) y el valor de redención en la fecha de vencimiento. La unidad de tiempo es el mes:

[3] El valor de redención de la obligación es su valor en la fecha de vencimiento.



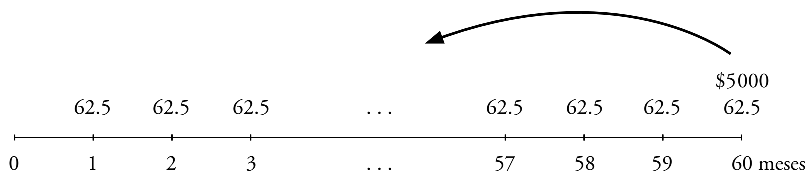
Para obtener el pago de los intereses generados por esta obligación se utilizará la tasa de interés de 15% anual entendida como capitalizable mensualmente:

$$I = Cit$$

$$I = (500)\left(\frac{0.15}{12}\right)(1)$$

$$I = \$62.50 \qquad \text{Intereses de cada mes}$$

El pago de interés y el valor de redención que recibirá el señor Romo por la compra de la obligación es:



Como el señor Romo desea obtener un rendimiento de 18.5% capitalizable cada mes, el precio a pagar por la obligación se obtiene calculando el valor presente de los intereses mensuales, los cuales forman una anualidad vencida, más el valor presente del valor del vencimiento, ambos calculados a la tasa de 18.5% cada mes.

Para encontrar el precio que el señor Romo debe pagar por la obligación (o valor presente de la obligación) se utiliza la siguiente ecuación de valor:

$$VP = 62.50\underbrace{\left[\left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-1} + \left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-2} + \ldots + \left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-59} + \left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-60}\right]}_{\text{Serie de pagos}} + 5000\left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-60}$$

$$VP = 62.50\,[38.961733] + 1996.70$$

$$VP = \$4431.81 \qquad \text{precio de la obligación que desea adquirir el señor Romo}$$

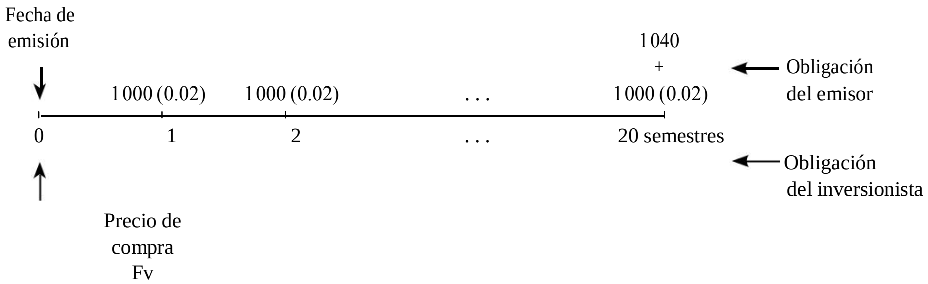
Ejemplo 4

Encontrar el precio de compra de un bono de $1,000 que paga intereses de 4% anual capitalizable semestralmente y redimible al 104 en 10 años si se compra para rendir $4^{1/2}$ % anual convertible semestralmente.

Solución

Los intereses semestrales son fijos (por calcularse siempre sobre el valor nominal) a la tasa del $\frac{0.04}{2}$ = 0.02 efectiva semestral. Por ser redimible al 104 significa que el valor nominal se incrementará un 4% en la fecha de vencimiento, es decir, el valor de redención será sobre par: 1 000 (1 + 0.04) = 1 040.

Las obligaciones del emisor y del inversionista se muestran a continuación:



La ecuación de valor que se obtiene al valuar el bono a la fecha de emisión es:

$$PC = 1{,}000(0.02)\left(1+\ \frac{0.045}{2}\right)^{-1} + 1{,}000(0.02)\left(1+\ \frac{0.045}{2}\right)^{-2} +\ \ldots + 1{,}000(0.02)\left(1+\ \frac{0.045}{2}\right)^{-20} +\ 1{,}040\ \left(1+\ \frac{0.045}{2}\right)^{-20}$$

$$PC = 1{,}000(0.02) + \left(1+\ \frac{0.045}{2}\right)^{-1} + \left(1+\ \frac{0.045}{2}\right)^{-2} +\ \ldots + \left(1+\ \frac{0.045}{2}\right)^{-20} +\ 1{,}040\ \left(1+\ \frac{0.045}{2}\right)^{-20}$$

PC = \$985.72 Es el precio de compra del bono en la fecha de emisión

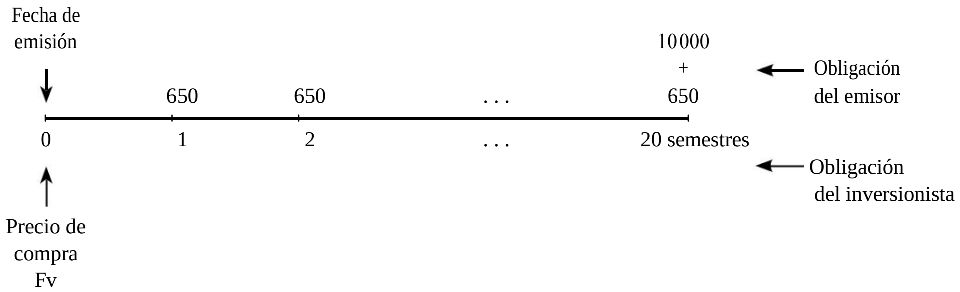
Se dice que el bono se compra con un descuento de \$1,040 – \$985.72 = \$54.28.

Ejemplo 5

Un bono con valor nominal de $10,000 y redimible a la par dentro de 10 años paga una tasa cupón de 13% anual convertible semestralmente y se compra para rendir un 12% de interés anual convertible semestralmente. Encontrar el precio de compra y la prima.

Solución

La tasa efectiva por semestre para el pago de intereses es de $\frac{0.13}{2}$ = 0.065, así el pago de intereses semestrales es de \$10000 (0.065) = \$650.



La tasa efectiva de inversión es de $\frac{0.12}{2}$.

$$PC = 650\left[\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{-1}+\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{-2}+\ldots+\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{-20}\right]+10{,}000\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{-20}$$

$PC = \$10573.94$

$\therefore$ prima = \$10573.49 – \$10000
= \$ 573.49 Representa el valor presente de los pagos en exceso que recibe el inversionista

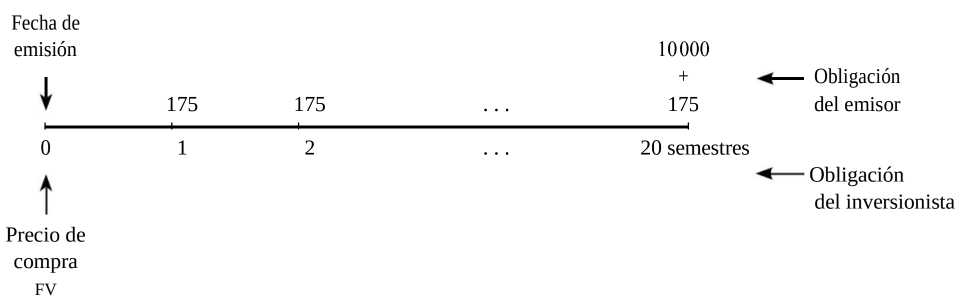
Ejemplo 6

Un bono de \$10000 con una tasa cupón de $3^{1/2}$ % anual convertible semestralmente, redimible a la par en 10 años, se compra para rendir un 8% anual convertible semestralmente. Encontrar el precio de compra y el descuento.

Solución

La tasa efectiva del pago de intereses es de $\frac{0.035}{2}$ = 0.0175

El pago de interés semestral es de $\frac{0.08}{2}$.



$$PC = 175\left[\left(1+\frac{.08}{2}\right)^{-1}+\left(1+\frac{.08}{2}\right)^{-2}+\ ...+\left(1+\frac{.08}{2}\right)^{-20}\right]+10{,}000\left(1+\frac{.08}{2}\right)^{-20}$$

$PC = \$6942.17$

$\therefore$ descuento = $10,000.00 – $6,942.17
= $ 891.98 Representa el valor presente del déficit de la serie de pagos que recibe el inversionista.

Es importante señalar que no importa cuál sea el precio de mercado de un bono, el emisor paga interés sobre el valor de carátula (valor nominal) por bono y además paga, al vencimiento de él, el valor de carátula (o valor a la par).

Cuadro 8.1
Bonos gubernamentales en México

Instrumento	Definición	Emisor	Valor Nominal	Plazo	Rendimiento
Ajustabonos	Título de crédito a largo plazo, en donde se consigna la obligación del gobierno federal a liquidar una suma de dinero que se ajusta de acuerdo al INPC.	Gobierno federal	100 pesos	Actualmente existen emisiones de 3 y 5 años.	Estará referido al valor y adquisición de los títulos y la tasa real que devenguen cada 91 días.
Bondes	Títulos de crédito negociable, en los cuales se consigna la obligación directa e incondicional del gobierno federal a liquidar una suma de dinero con cortes periódicos de cupón a largo plazo. Bonos de desarrollo.	Gobierno federal	100 pesos	Su vencimiento mínimo es de 1 a 2 años. Cada emisión tiene su propio plazo en múltiplos de 28 días, sin ser menores a 1 año y mayores a 728 días.	Se colocan en el mercado a descuento, con un rendimiento pagable cada 28 días (Cetes a 28 días o TIIE, la que resulte más alta). Existe una variante de este instrumento con rendimiento pagable cada 91 días, llamado Bonde 91.
Bondest	Los bonos de desarrollo del gobierno federal con pago trimestral de interés (Bondest) se ubican dentro de la familia de los valores gubernamentales a tasa flotante, esto significa que pagan intereses en periodos predeterminados y revisan su tasa de interés en cada uno de esos periodos.	Gobierno federal	100 pesos	Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 91 días. No obstante lo anterior, hasta la fecha estos títulos se han emitido a plazo de 1092 días (3 años).	Periodo de interés. Los títulos devengan intereses en pesos cada tres meses. Esto es, cada 91 días o al plazo que sustituya a éste en caso de días inhábiles.
Brems	Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México (Brems).	Banco de México	100 pesos	Intereses sobre saldos insolutos, pagaderos al vencimiento de cada periodo de interés.	Comenzarán a partir de la fecha de emisión de los Brems amparados por el presente título. Estos periodos podrán ser de 27, 28 o 29 días, de tal manera que su fecha de vencimiento coincida con un día jueves. En caso de días inhábiles, dicho plazo se ajustará al día hábil anterior o posterior más cercano, dando en caso de igualdad preferencia al día anterior.

Instrumento	Definición	Emisor	Valor Nominal	Plazo	Rendimiento
BPAS	Emisiones del Instituto Bancario de Protección al Ahorro con el fin de hacer frente a sus obligaciones contractuales y reducir gradualmente el costo financiero asociado a los programas de apoyo a ahorradores.	Instituto Bancario de Protección al Ahorro	100 pesos, amortizables al vencimiento de los títulos en una sola exhibición.	3 años	Se colocan en el mercado a descuento y sus intereses son pagaderos cada 28 días. La tasa de interés será la mayor entre la tasa de rendimiento de los Cetes al plazo de 28 días y la tasa de interés anual más representativa que el Banco de México dé a conocer para los pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento (PRLV's)[4] al plazo de un mes. Garantía: gobierno federal.
Cetes	Títulos de crédito al portador en los que se consigna la obligación del gobierno federal a pagar su valor nominal al vencimiento.	Gobierno federal	10 pesos	Desde 28, 91, 182, 364 días, aunque han existido desde 7, 14, 21 días y 2 años.	Se venden a descuento. El rendimiento se obtiene al comprar la ganancia obtenida respecto a la inversión original.
PIC	Pagaré de Indemnización Carretero: se le conoce como PIC-FARAC (por pertenecer al Fideicomiso de Apoyo al Rescate de Autopistas Concesionadas); es un pagaré avalado por el gobierno federal a través del Banco Nacional de Obras y Servicios SNC en el carácter de fiduciario.	El gobierno federal a través del Banco Nacional de Obras y Servicios SNC en el carácter de fiduciario.	100 UDIS	De 5 a 30 años	El rendimiento en moneda nacional de este instrumento dependerá del precio de adquisición, con pago de la tasa de interés fija cada 182 días. Garantía: gobierno federal.

[4] Pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento.

Instrumento	Definición	Emisor	Valor Nominal	Plazo	Rendimiento
Udibonos	Este instrumento está indizado (ligado) al Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC) para proteger al inversionista de las alzas inflacionarias. Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México (Brems).	Avalado por el gobierno federal.	100 UDIS 100 pesos	De tres y cinco años con pagos semestrales. Intereses sobre saldos insolutos, pagaderos al vencimiento de cada periodo de interés.	Operan a descuento y dan una sobretasa por encima de la inflación (o tasa real) del periodo correspondiente. Depende de: precio de adquisición, tasa de interés de la emisión correspondiente y el valor de las UDIS.
BPAT	Bonos de Protección al Ahorro con pago trimestral de interés (BPAT).	El Instituto para la Protección al Ahorro Bancario (IPAB) utiliza para ello al Banco de México como su agente financiero. Esto con el único objeto de canjear o refinanciar sus obligaciones financieras a fin de hacer frente a sus obligaciones de pago, otorgar liquidez a sus títulos y, en general, mejorar los términos y condiciones de sus obligaciones financieras.	100 pesos	Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 91 días. Tomando en consideración lo anterior, estos títulos se emiten a plazo de 1820 días (5 años).	Los periodos deberán ser iguales al plazo de los Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes), a tres meses de plazo, que se emitan al inicio de cada periodo. Los títulos devengan intereses en pesos.
Cetes	Los Certificados de la Tesorería de la Federación son títulos de crédito al portador en los se consigna la obligación de su emisor, el gobierno federal, de pagar una suma fija de dinero en una fecha predeterminada.	Gobierno federal	10 pesos, amortizables en una sola exhibición al vencimiento del título.	Las emisiones suelen ser a 28, 91,182 y 364 días, aunque se han realizado emisiones a plazos mayores, y tienen la característica de ser los valores más líquidos del mercado.	A descuento. Garantía: son los títulos de menor riesgo, ya que están respaldados por el gobierno federal.

FUENTE: Banco de México, Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

Figura 8.3
Valores importantes en la emisión de bonos

Mercado Global BMV Soberanos

BONOS DEL GOBIERNO FEDERAL
COLOCADOS EN EL EXTERIOR
UMS

1. INSTRUMENTO: UMS GLOBAL BONDS 9.750% due 2005

Características:

EMISOR	Gobierno Federal, a través de la SHCP
MONTO DE LA EMISIÓN (Vigente)	U.S.$1,000,000,000
VALOR NOMINAL	U.S.$1,000
MONEDA ORIGINAL	Dólares Americanos
FECHA DE EMISIÓN	06 de Abril de 1999
FECHA DE VENCIMIENTO	06 de Abril de 2005
PLAZO	6 años
TASA DE INTERÉS DEL CUPON	9.750%
TIPO DE TASA	Fija
PERIODICIDAD DE PAGO	Semestral
FECHAS DE PAGO	06 de Abril y 06 de Octubre

ISIN	US91086QAB41
CUSIP	91086QAB4

CLAVE BMV	
TIPO DE VALOR	D1
EMISORA	UMS05F
SERIE	2005F

PROSPECTO DE COLOCACIÓN	25 de Marzo de 1999
FECHA INSCRIPCIÓN EN RNV	13 de Mayo de 1999

Emisor:

GOBIERNO FEDERAL
SECRETARÍA DE HACIENDA Y CRÉDITO PÚBLICO
Palacio Nacional Patio Central,
Col. Centro, México, D.F., C.P. 06000
Teléfono: 91-58-11-54

Ejercicios propuestos

1. Determinar el precio de adquisición de un bono en el mercado secundario que cotiza al 3.4% efectivo anual y al que restan para su amortización (vencimiento) 3 años y 9 meses. El cupón es de 1.5% semestral. El valor nominal del bono es de $100.
   Sol.: 87.704067 o 89.12087661.
2. Calcular la rentabilidad de un bono a 5 años con pago de dividendos anuales vencidos de $10 que se compra a la par; el valor nominal del bono es de $100.
   Sol.: 10%.
3. Un inversor adquiere un bono en el mercado secundario por su valor nominal de $1000. El bono paga un cupón semestral de 6% nominal anual; el vencimiento del primer dividendo es dentro de 6 meses y se amortiza dentro de 18 meses con una prima de amortización de $10. El valor nominal del bono es de $1000. Calcular la rentabilidad del bono.
   Sol.: 6.75%.
4. En el mercado secundario se cotiza un bono al 102% sobre el precio nominal que es de $1000; paga un cupón de 6%. El primer pago de cupón es dentro de un año; el bono madura a los 4 años y paga una prima de amortización de $20. ¿Cuál es la tasa de rendimiento del bono?
   Sol.: 5.887% anual.
5. Calcular la rentabilidad de un bono a 3 años con pagos de dividendos semestrales vencidos de $50 que se compra a la par. El valor nominal del bono es de $100. Sol.: 50% de rentabilidad.
6. Calcular el precio de adquisición de un bono de cupón anual 5% amortizable por el valor nominal de $100 a los 3 años y cuya TIR es de 3%.
   Sol.: $105.66.
7. Su compañía está por emitir bonos con valor de carátula de $1000 y redimibles dentro de 20 años con una tasa de descuento de 8.2%; sin embargo, las condiciones del mercado sugieren que deberían emitirse esos bonos al 8.6%. Si la tasa de descuento bajara y otra compañía emitiera bonos al 7.5%, a) ¿cuál sería el precio de su bono en el mercado?, b) ¿se debería negociar su bono sobre par o bajo par?, c) si la tasa de descuento aumentara y otra compañía emitiera bonos al 9.5%, ¿cuál sería el precio de su bono en el mercado?
   Sol.: a) $ 1112.14, b) sobre par, c) $920 y negociarlo bajo par.

Anexo
Funciones financieras de Excel

Introducción

La solución a problemas financieros mediante la aplicación de las matemáticas financieras se facilita con el uso de calculadoras financieras u hojas electrónicas de cálculo, o con la aplicación de métodos numéricos para manejar series en progresión geométricas y aritméticas o para encontrar raíces reales de polinomios. Las matemáticas necesarias para reducir series y para encontrar la tasa de interés en series de pagos generalmente no se enseñan en los textos de matemáticas enfocadas a los negocios; actualmente se puede recurrir a las aplicaciones que Microsoft® Office Excel ofrece para que a partir del conocimiento de las matemáticas financieras se faciliten los cálculos para encontrar la solución a tales problemas.

En este anexo se ilustrarán las aplicaciones de las funciones financieras de Microsoft® Office Excel 2003 de Windows XP para resolver nuevamente los ejercicios identificados con el símbolo en los capítulos con el método, llamémosle, tradicional (planteamiento de la ecuación de valor y uso de una calculadora de bolsillo). En cada ejercicio se muestran los cuadros de diálogo que genera cada una de las funciones financieras de Excel y se indican los argumentos necesarios para su ejecución.

La selección de los ejercicios se realizó con el objetivo de mostrar al lector que se puede explotar eficientemente esta herramienta sólo si se han comprendido y razonado los métodos y las técnicas de las matemáticas financieras.

1.1 Descripción de Funciones Financieras de Microsoft® Office Excel 2003

Las funciones financieras de Excel que se ilustran en este anexo corresponden a los siguientes valores de una anualidad: el valor actual, el valor futuro, el importe del pago periódico, el número de pagos, la tasa de interés, el capital contenido en el pago, el capital insoluto al principio del periodo; asimismo se calcula el valor presente neto de un proyecto de inversión financiera y la tasa interna de rendimiento.

La sintaxis y los argumentos necesarios para ejecutar cada función financiera tienen el siguiente formato:

VALOR (argumento 1, argumento 2,…, argumento n).

A continuación se describen las funciones y el resultado de su ejecución y se muestra la sintaxis requerida.

Función financiera	Devuelve	Sintaxis
VA	El valor actual de una inversión. El valor actual es el valor que tiene actualmente la suma de una serie de pagos que se efectuarán en el futuro.	VA (tasa, nper, pago, vf, tipo)
VF	El valor futuro o un saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago.	VF (tasa, nper, pago, va, tipo)
PAGO	El pago periódico de un préstamo o el depósito periódico suponiendo que son constantes y con una tasa de interés constante.	PAGO (tasa, nper, va, vf, tipo)
NPER	El número de pagos periódicos considerando que éstos son constantes y la tasa de interés es fija y efectiva por periodo de pago.	NPER (tasa, pago, va, vf, tipo)
TASA	La tasa de interés por periodo de una anualidad. Si los resultados sucesivos de TASA no convergen dentro de 0,0000001 después de 20 iteraciones, TASA devuelve el valor de error #¡NÚM.	TASA (nper, pago, va, vf, tipo, estimar)
PAGOINT	El interés contenido en cada periodo de pago por un préstamo suponiendo que éstos se realizan en intervalos de la misma longitud (periodo) y con una tasa de interés efectiva por periodo de pago constante. Los pagos se efectúan al final de cada periodo de pago.	PAGOINT (tasa, periodo, nper, va, vf, tipo)
PAGOPRIN	El capital contenido en el pago en cada periodo de pago; los pagos son constantes.	PAGOPRIN (tasa, periodo, nper, va, vf, tipo)
VNA	El valor presente neto de un proyecto de inversión a partir de una tasa de interés con la que se descuentan los flujos de efectivo que forman una serie de egresos futuros (valores negativos) e ingresos (valores positivos). La inversión VNA comienza un periodo antes de la fecha del flujo de caja de valor 1 y termina con el último flujo de caja de la lista. El cálculo VNA se basa en flujos de caja futuros. Si el primer flujo de caja ocurre al inicio del primer periodo, el primer valor se deberá agregar al resultado VNA, que no se incluye en los argumentos valores.	VNA (tasa, valor 1, valor 2, ...)
TIR	La tasa interna de rendimiento de los flujos de efectivo. Estos flujos de efectivo pueden ser constantes o variables y deben ocurrir al final de intervalos de la misma longitud (periodos).	TIR (valores, estimar)

1.1.1 Descripción de los argumentos de cada función financiera

A continuación se describen los argumentos de las funciones financieras empleadas en este anexo:

Tasa: es una tasa efectiva de interés por periodo de pago de la renta. Se puede escribir como porcentaje (incluyendo el símbolo %) o bien en decimales.

Pago: es el importe del pago periódico (o renta); debe permanecer constante durante el término (duración) de la anualidad. Se escribe con signo negativo ("–"). El algoritmo asume que para todo ingreso debe haber un egreso; si se omitiera el signo "–" el resultado de la fórmula aparecería como negativo.

Va: es el valor actual de una serie de pagos futuros, descontados en el momento presente.*

Vf: es el valor futuro que se desea obtener después de efectuar una serie de pagos.*

Tipo: se refiere al pago periódico; si éste es vencido o anticipado. Si se escribe el valor se refiere a que los pagos son vencidos y si se indicó 1, será anticipado. Si se omite el valor, el resultado obtenido se considerará generado por una serie de pagos vencidos.

Estimar: es un número que el usuario estima que se aproximará al resultado de TIR. En general no se necesita proporcionar este número. Si se omite se supondrá que es 0.1 (10%).

Valor 1, valor 2,…: son hasta 29 valores que representan los egresos e ingresos de un proyecto de inversión; se asume que estos valores aparecen al final de intervalos de tiempo iguales (periodos).

Asegúrese de escribir los valores de egresos e ingresos en el orden en que se generan en el tiempo.

1.2 Ejercicios resueltos de los capítulos

Capítulo 3. Interés compuesto

Ejemplo 8 del capítulo 3

Un deudor puede liquidar una deuda ya sea mediante un pago único de $8000 de inmediato o de $10000 dentro de 5 años. ¿Qué opción debe aceptar el deudor suponiendo un crecimiento de 5% convertible semestralmente?

* Cuando ambos argumentos aparecen en la misma función financiera, sólo debe escribirse uno de ellos.

Para que el lector empiece a familiarizarse con las funciones financieras de Excel se ilustrará el procedimiento para obtener el valor presente de $10000 al final de 5 años, aunque es irrelevante su aplicación en este ejemplo.

El valor presente de la segunda opción del deudor es:

$$VP = 10000\left(1 + \frac{\frac{0.05}{360}}{180}\right)$$

$$VP = \$7811.68$$

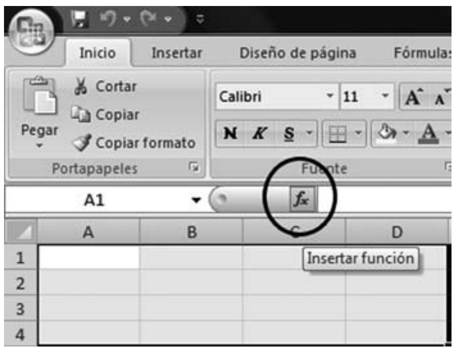
Se utilizará la función financiera Valor Actual (*VA*), cuyos argumentos son:

VA (tasa; nper; pago; vf; tipo)

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar > Función*

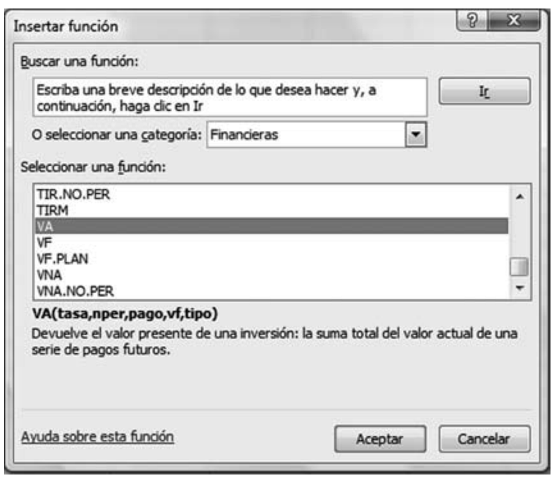


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría ***Financieras***

Seleccionar la función financiera: *VA*

Dar "clic" en ***Aceptar***

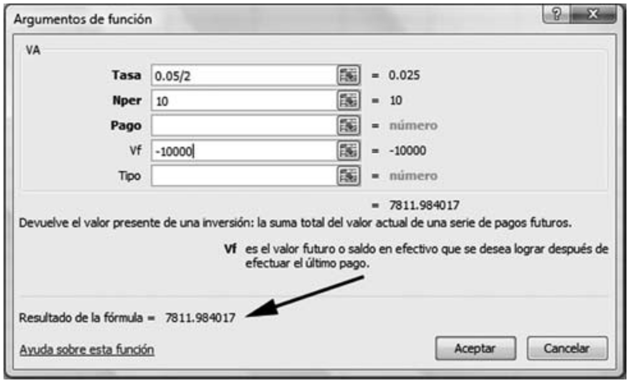


Pasos 3 al 6

Introducir los valores conocidos:

Paso 3: Tasa 0.05/2
Paso 4: Nper 10
Paso 5: Vf: -1000
Paso 6: Tipo 0

Dar "clic" en ***Aceptar***



En el paso número 6 se omite *Tipo* porque sólo se está calculando el valor presente con un flujo de efectivo.

El pago de $10000 se refiere a un valor futuro (véase el diagrama de tiempo en el capítulo 3) y es único; por tal motivo el argumento *Pago* se deja en blanco: se refiere a series de pagos fijos.

Capítulo 4. Ecuación de valor

Ejemplo 6 del capítulo 4

El precio de contado de un automóvil nuevo es de $220000 y se desea adquirirlo mediante un financiamiento a 2 años, un enganche de $20000, 23 pagos de $8000 mensuales y un último pago que saldaría la deuda; si la tasa de interés que se cobra por el crédito es de 18% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es el importe de ese último pago?

Una vez establecido el principio de equitatividad, se llegó a la siguiente ecuación de valor:

$$220000\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{24}=20000\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{24}+8000\left[\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{1}+\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{2}+\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{3}+\ldots+\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{23}\right]+x$$

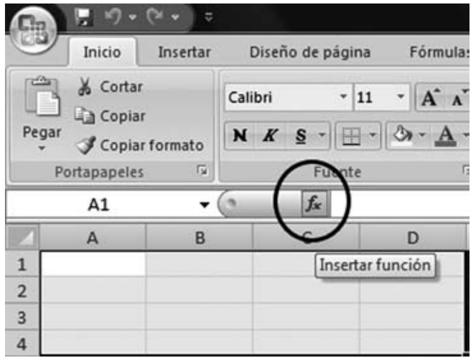
Para conocer el importe del pago fraccionario, bastaría calcular la serie de 23 pagos con la función financiera Valor Futuro (VF) y sustituir en la ecuación anterior el valor encontrado para despejar el importe del último pago requerido.

VF (tasa; nper; pago; va; tipo)

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar > Función*

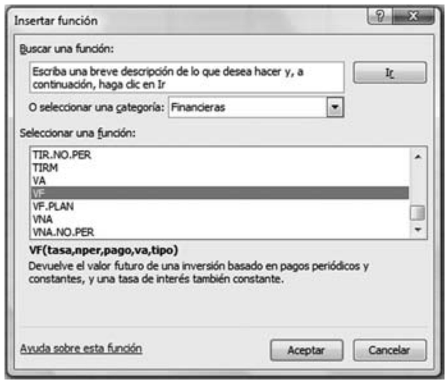


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría ***Financieras***

Seleccionar la función financiera: *VF*

Dar "clic" en ***Aceptar***

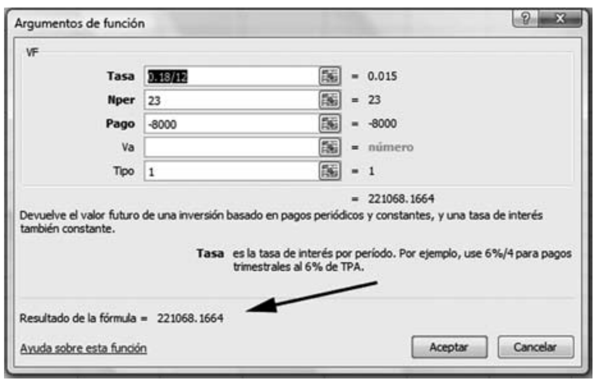


Pasos 3 al 6

Introducir los datos correspondientes de la primera serie de pagos:

Paso 3: Tasa 0.18/12
Paso 4: Nper 23
Paso 5: Pago – 8000
Paso 6: Tipo 1

Dar "clic" en ***Aceptar***



Obsérvese que en el diagrama de tiempo del capítulo 4 se seleccionó como fecha de valuación el mes número 24; para el cálculo del valor futuro con la función financiera FV de la serie se debe entender como una serie de pagos anticipados.

El resultado obtenido se sustituye en la ecuación y se despeja el valor del último pago:

$$314490.6186 = 28590.06 + 221068.17 + x$$
$$x = \$64832.39$$

Ejemplo 7 del capítulo 4

¿Cuál es el monto de una inversión dentro de 5 años si al inicio de cada trimestre se invierten $400 a una tasa anual efectiva de 6%?

Para resolver mediante la aplicación de las funciones financieras de Excel, no es posible emplear la tasa de 6% efectivo anual: se debe emplear forzosamente un tasa de interés cuyos periodos de capitalización coincidan con el periodo de pago de la renta; así, se empleará una tasa efectiva trimestral, es decir, se empleará la tasa anual capitalizable trimestralmente *equivalente* al 6% efectivo anual; tasa ya calculada en el inciso b) del capítulo 4.

La ecuación de valor es:

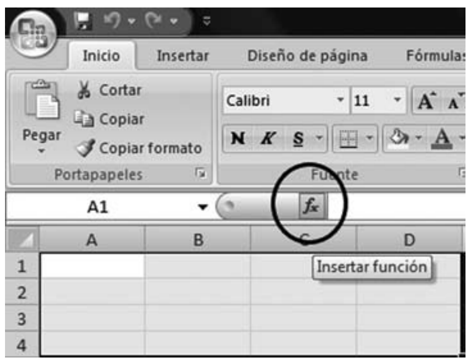
$$VF = 400\left[(1 + 0.01467375)^{1} + (1 + 0.01467375)^{2} + \ldots + (1 + 0.01467375)^{19} + (1 + 0.01467375)^{20}\right]$$

La serie geométrica de 20 pagos representa el valor futuro de una anualidad anticipada; se utilizará la función financiera Valor Futuro (VF), cuyos argumentos son:

VF (tasa; nper; pago; va; tipo)

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)
* O bien, en el menú *Insertar > Función*

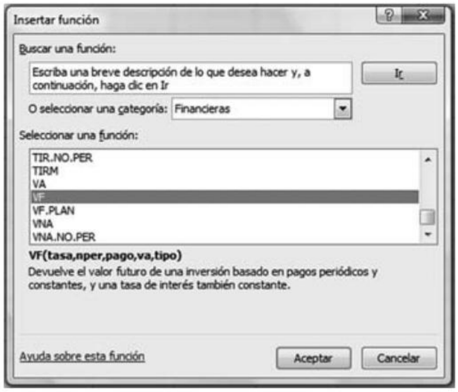


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría ***Financieras***

Seleccionar la función financiera: ***vf***

20 Dar "clic" en ***Aceptar***

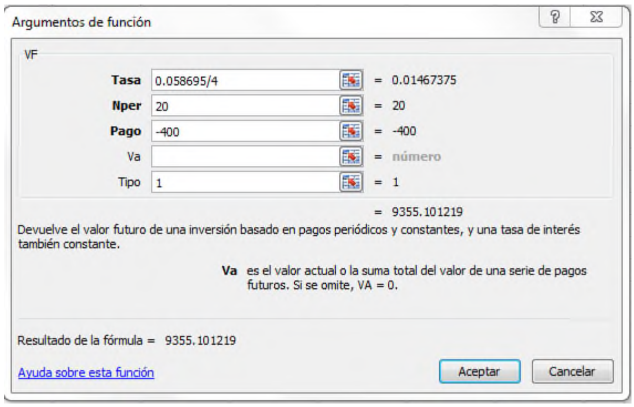


Pasos 3 al 6

Introducir los valores correspondientes:

Paso 3: Tasa:0.058695/ 4 ***Paso 4:*** Nper: 20 ***Paso 5:*** Pago: – 400 ***Paso 6:*** Tipo 1

Dar "clic" en **Aceptar**



Unidad 5. Anualidades Ciertas

Ejemplo 7 del capítulo 5

Una persona que inicia su vida activa como trabajador en este momento, desea acu-mular un fondo para su retiro depositando $1000 al inicio de cada año durante un plazo de 25 años. Quince años después desea realizar 25 retiros anuales al inicio de cada año. Suponiendo que todos los pagos se harán realmente, ¿cuál será el importe de cada retiro que deberá realizar si la tasa de interés es de 4% efectiva durante los primeros 25 años y de 3.5% para los años posteriores?

Esta persona empieza a ahorrar al inicio de su vida activa; el primer retiro lo efectuará dentro de 40 años.

La ecuación de valor que vincula a las dos series de obligaciones (depósitos y retiros) es:

$$1000\,[(1+0.04)^{1}+(1+0.04)^{2}+\ldots+(1+0.04)^{25}] = R\,(1+0.035)^{-15}\,[1+(1+0.035)^{-1}+(1+0.035)^{-2}+\ldots+(1+0.035)^{-24}]$$

Para calcular la suma de las dos series geométricas se emplearán sendas funciones financieras; para sumar la serie del lado izquierdo de la ecuación se empleará la función Valor Futuro (VF); para sumar la serie del lado derecho se empleará la función Valor Actual (VA).

Cálculo del valor futuro de la serie de depósitos

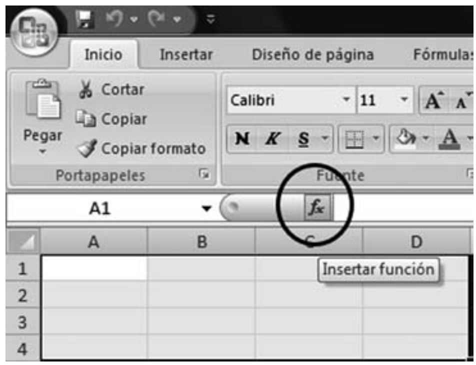
La función a emplear es Valor Futuro (VF), cuyos argumentos son:

VF (tasa; nper; pago; va; tipo)

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar > Función*

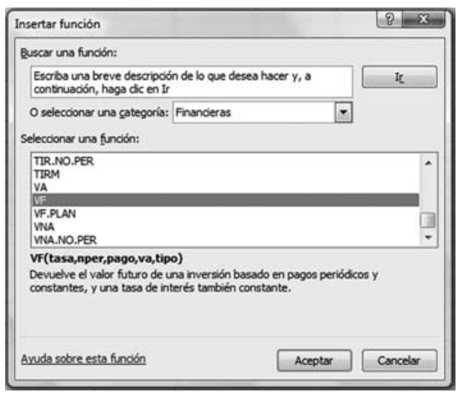


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría ***Financieras***

Seleccionar la función financiera: *VF*

Dar "clic" en ***Aceptar***

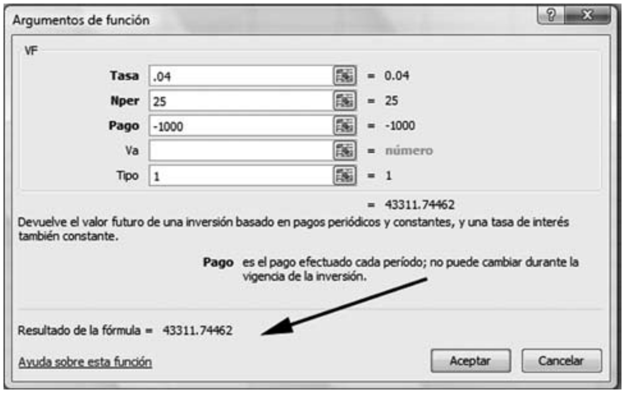


Pasos 3 al 6

Introducir los valores de los pagos correspondientes:

Paso 3: Tasa 0.04
Paso 4: Nper: 25
Paso 5: Pago: – 1000
Paso 6: Tipo 1

Dar "clic" en Aceptar



Cálculo del "valor actual" de la serie de retiros

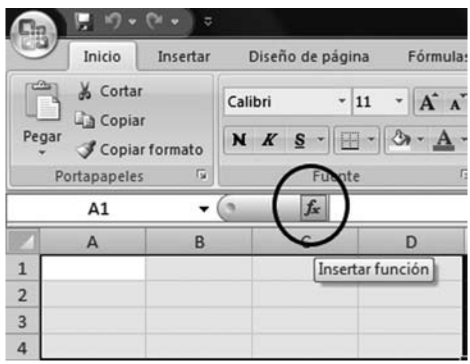
Recuérdese que se considera como "momento presente" el año 40 —véase el diagrama de tiempo respectivo en el capítulo 5—. Se empleará la función Valor Actual (VA); de este modo se reinterpreta a la serie de retiros como una serie de 25 pagos anticipados de $1 cada uno; el "valor actual" obtenido con la función financiera se ubica en el año 40. Los argumentos de dicha función son:

VA (tasa; nper; pago; vf; tipo)

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar* > *Función*

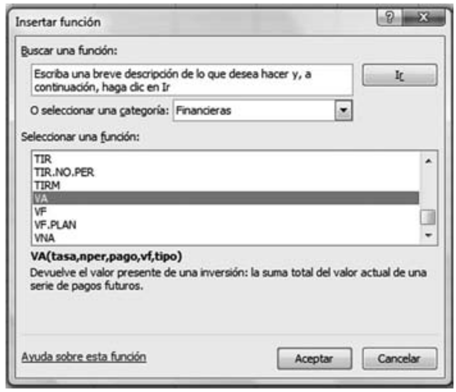


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría *Financieras*

Seleccionar la función financiera:
*VA**

Dar "clic" en *Aceptar*



Pasos 3 al 6

Introducir los valores conocidos:

Paso 3: Tasa 0.035
Paso 4: Nper 25
Paso 5: Vf: -1
Paso 6: Tipo 1

Dar "clic" en *Aceptar*

Sustituyendo en la ecuación de valor:

$$\begin{aligned} \$43311.75 &= R\,(1 + 0.035)^{-15}\,(17.0583676) \\ \$4253.76 &= R \end{aligned}$$

Ejemplo 8 del capítulo 5

¿Durante cuánto tiempo se podrán hacer retiros mensuales completos por $200 cada uno si para ello se invierten $25000 a una tasa de interés anual convertible mensualmente de 7%?

La ecuación de valor que vincula a la inversión con la serie de retiros es:

$$25000 = 200\left[\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{-2} + \left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{-3} + \ldots + \left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{-n}\right]$$

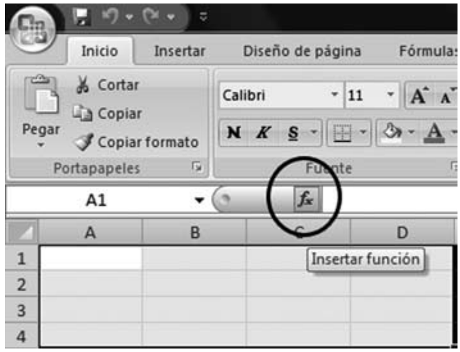
Para encontrar el número de pagos se empleará la función financiera *NPER* cuyos argumentos son:

NPER (tasa; pago; va; vf; tipo)

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar > Función*

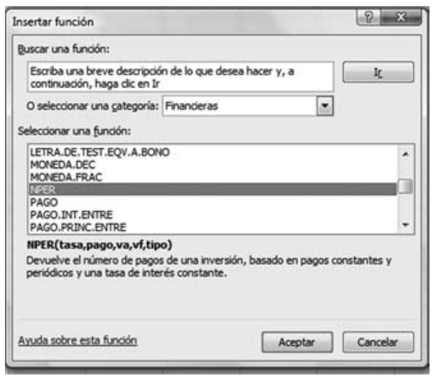


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría ***Financieras***

Seleccionar la función financiera: *NPER*

Dar "clic" en ***Aceptar***

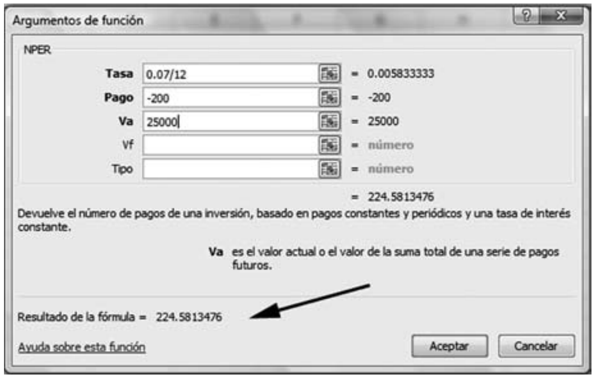


Pasos 3 al 6

Introducir los datos correspondientes al problema planteado:

Paso 3: Tasa 0.07/12
Paso 4: Pago –200
Paso 5: Va 25000
Paso 6: Tipo 0

Dar "clic" en Aceptar



El número de pagos será de 224 más un pago fraccionario desconocido.

Ejercicio 9 del capítulo 5
Calcúlese el importe del último pago del ejercicio anterior, si éste se efectúa en el momento de realizar el último pago regular.

Para conocer el importe del pago fraccionario, se calculará éste bajo la suposición de que el último pago regular es el número 223, de tal forma que el último incluya un pago de $200 más uno fraccionario, el cual se efectuará un mes después.[1]

Así la ecuación de valor del ejercicio 8 se reexpresaría:

$$25000 = 200\left[\underbrace{\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-1}+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-2}+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-3}+\ldots+\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-223}}_{\text{Serie geométrica}}\right]+(200+x)\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{-224}$$

Para encontrar el valor presente o actual de la serie geométrica de pagos se utilizará la función financiera VA cuyos argumentos son:

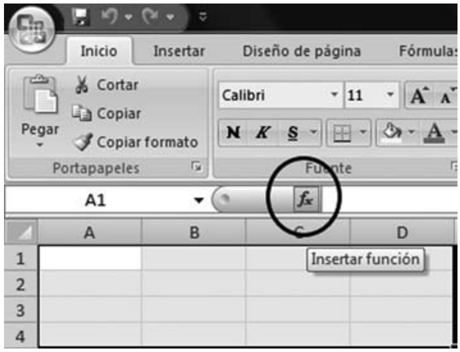
VA (tasa; nper; pago; vf; tipo)

[1] En el ejemplo 7 resuelto en el capítulo 5 se calculó el último pago de tal forma que fuese menor al pago regular ($200); aquí se ejemplifica el caso del cálculo del último pago como mayor al pago regular.

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar > Función*

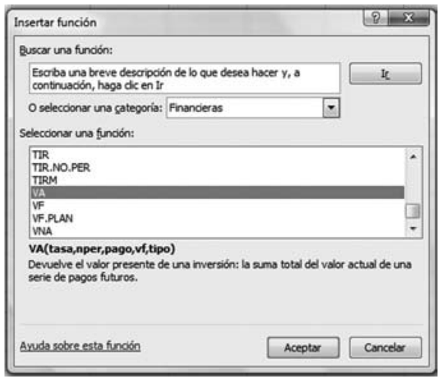


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría ***Financieras***

Seleccionar la función financiera: *VA*

Dar "clic" en ***Aceptar***

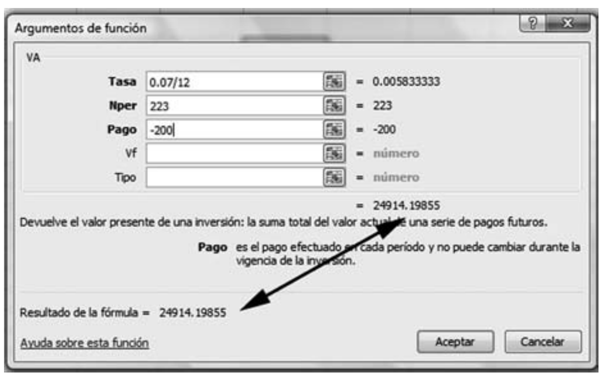


Pasos 3 al 6

Introducir los datos correspondientes al problema planteado:

Paso 3: Tasa 0.07/12
Paso 4: Nper 223
Paso 5: Pago -200
Paso 6: Tipo

Dar "clic" en ***Aceptar***



El resultado obtenido anteriormente se sustituye en la ecuación de valor que es:

$$25000 = 24914.19855 + (200 + x)\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{-224}$$

$x = \$115.73$ Valor del pago fraccionario

Por lo tanto, el último retiro irregular será de $315.73, es decir, el último retiro a efectuarse en el mes número 224 con el que se agotará el fondo será de $200 + $115.73 = $315.73.

Ejemplo 11 del capítulo 5

Se colocan $300 al final de cada 3 meses durante 6 años en un fondo mutuo de inversión: al final de 6 años se adquieren acciones valuadas en $9874.60. ¿Qué tasa nominal convertible trimestralmente ganó la inversión?

Como las funciones financieras sólo aceptan tasas efectivas por periodo de pago de la renta, es conveniente saber que la ecuación de valor que se debería plantear puede ser a partir del valor presente o del valor futuro de la serie de pagos. A continuación se presenta el valor futuro de las obligaciones:

$$9874.60 = 300 + 300\left[(1+i)^{1} + 300(1+i)^{2} + \ldots + 300(1+i)^{23}\right]$$

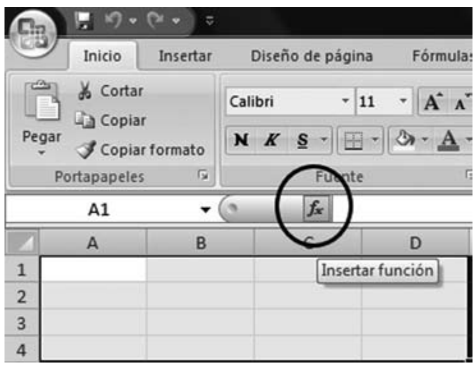
Donde i es la tasa efectiva trimestral (por periodo de pago de la renta) buscada.

Se empleará la función financiera TASA cuyos argumentos son:

TASA (nper; pago; va; vf; tipo)

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)
* O bien, en el menú *Insertar > Función*

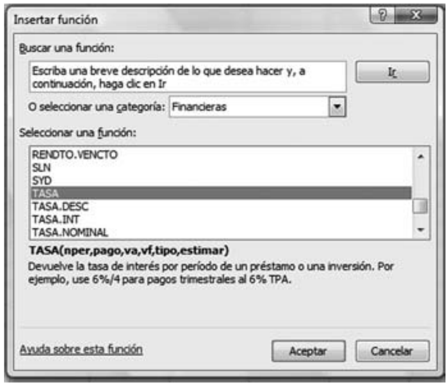


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría *Financieras*

Seleccionar la función financiera: *TASA*

Dar "clic" en ***Aceptar***

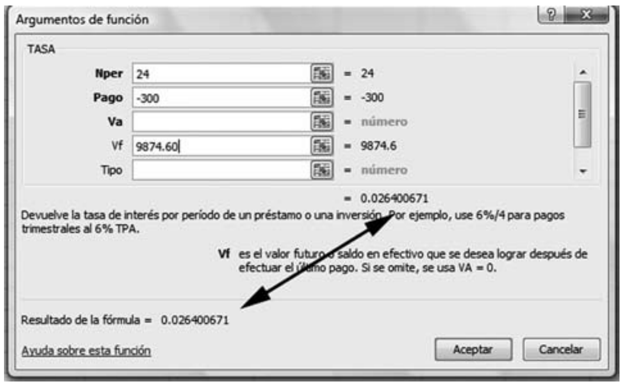


Pasos 3 al 6

Introducir los datos correspondientes al problema planteado:

Paso 3: Nper 24
Paso 4: Pago -300
Paso 5: Vf 9874.60
Paso 6: Tipo 1

Dar "clic" en ***Aceptar***



La tasa de interés obtenida es una efectiva trimestral; para calcular la nominal capitalizable trimestralmente basta recordar que:

$$\frac{i^4}{4} = i$$

donde i es la tasa efectiva trimestral
i^4 es la tasa nominal capitalizable trimestralmente

Por lo tanto la tasa nominal capitalizable trimestralmente es:

$$4\,(0.026400671) = 0.105602$$

La tasa de interés buscada es de 10.56%.

Ejemplo 12 del capítulo 5

Una deuda de $127000 se liquidará mediante pagos de $8000 semestrales a efectuarse en forma anticipada durante 10 años, ¿cuál es la tasa de interés contratada?

La ecuación de valor es:

$$127000 = 8000\left[1 + \left(1 + \frac{i^2}{2}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{i^2}{2}\right)^{-2} + \ldots + \left(1 + \frac{i^2}{2}\right)^{-19}\right]$$

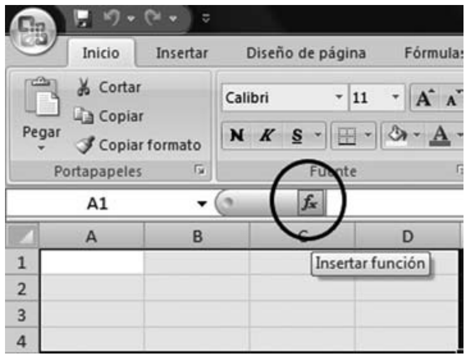
Se empleará la función financiera TASA cuyos argumentos son:

TASA (nper, pago; va; vf; tipo)

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar > Función*

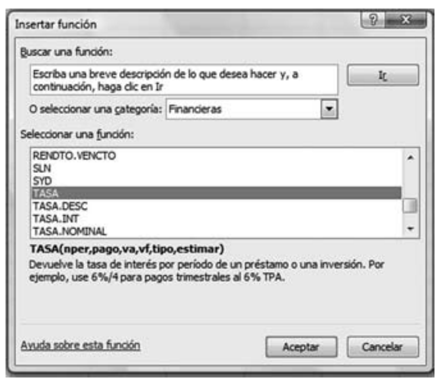


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría *Financieras*

Seleccionar la función financiera: *TASA*

Dar "clic" en *Aceptar*

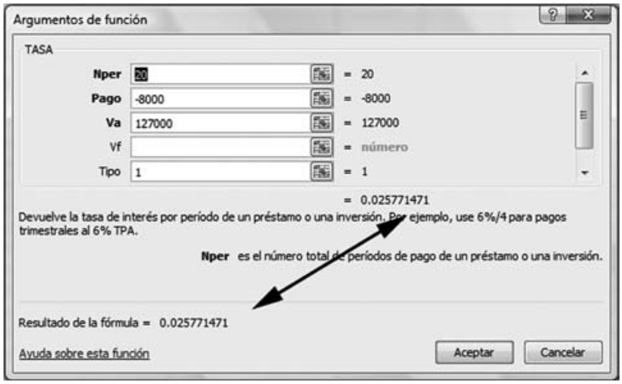


Pasos 3 al 6

Introducir los datos correspondientes al problema planteado:

Paso 3: Nper 20
Paso 4: Pago –8000
Paso 5: Va 127000
Paso 6: Tipo 1

Dar "clic" en ***Aceptar***



La tasa calculada con la *función financiera* TASA es de 0.025771471 y se refiere a una tasa efectiva semestral, así la tasa nominal capitalizable semestralmente (i^2) se obtiene mediante un sencillo cálculo:

$$
\begin{aligned}
\frac{i^2}{2} &= i;\ \text{donde } i \text{ es la tasa efectiva semestral} \\
\frac{i^2}{2} &= 0.025771471 \\
i^2 &= 0.025771471\ (2) \\
i^2 &= 0.0515429
\end{aligned}
$$

Esta tasa nominal es muy parecida a la obtenida mediante el empleo de la interpolación lineal calculada en el capítulo 5 con una diferencia de 148 cienmilésimos.[2]

Si se sustituye este valor en las expresiones [5.9] o [5.10] del capítulo 5 se obtienen $126999, valor más cercano a $127000.

Capítulo 6. Amortización

Ejemplo 3 del capítulo 6

Suponga que usted desea adquirir un automóvil mediante un financiamiento directo. El precio de contado del vehículo es de $285000 y el financiamiento consiste en un enganche de 20% sobre el precio de contado con una tasa fija nominal de 30% capitalizable mensualmente y pagos fijos mensuales.

a) ¿Cuál es el importe del capital pagado hasta antes de realizar el sexto pago?
b) ¿Cuál es el total de intereses pagados durante los primeros seis meses?

[2] Es decir, difieren en 148 diezmilésimos de punto porcentual.

c) ¿Cuál es el importe de los intereses y el capital contenidos en el sexto pago?
d) ¿Cuál es el total de intereses pagados por el crédito?
e) Si se deseara reestructurar la deuda (ya sea para modificar el plazo o el importe del pago mensual) después de haber realizado exactamente 5 pagos, ¿cuál es el capital insoluto en ese momento?
f) ¿Qué porcentaje de la propiedad del bien posee el deudor después de haber realizado el quinto pago?

Constrúyase la tabla de amortización para responder estas preguntas.

Se debe calcular primero el importe del pago periódico y a continuación se construirá la tabla de amortización, ambos mediante el uso de las funciones financieras de Excel.

Para obtener el pago periódico se emplea la función financiera PAGO cuyos argumentos son:

PAGO (tasa; nper; va; vf; tipo)

Cálculo del pago mensual fijo.
La ecuación de valor que permite encontrar el importe del pago mensual es:

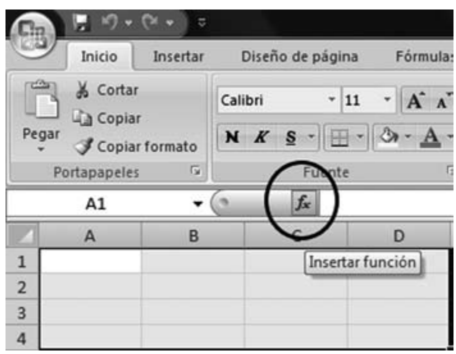
$$\$285000 = 57000 + R\left[\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{-1}+\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{-2}+\ldots+\left(1+\frac{0.30}{12}\right)^{-12}\right]$$

$$\$228000 = R[(1+0.025)^{-1}+(1+0.025)^{-2}+\ldots+(1+0.025)^{-12}]$$

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar > Función*

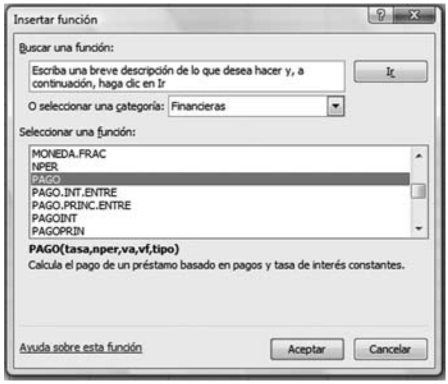


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría *Financieras*

Seleccionar la función financiera: *PAGO*

Dar "clic" en *Aceptar*

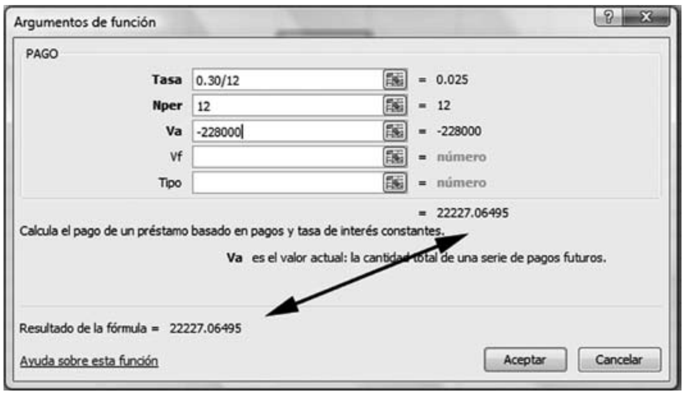


Pasos 3 al 6

Introducir los datos correspondientes de la primera serie de pagos:

Paso 3: Tasa 0.30/12
Paso 4: Nper 12
Paso 5: Pago –228000
Paso 6: Tipo 0

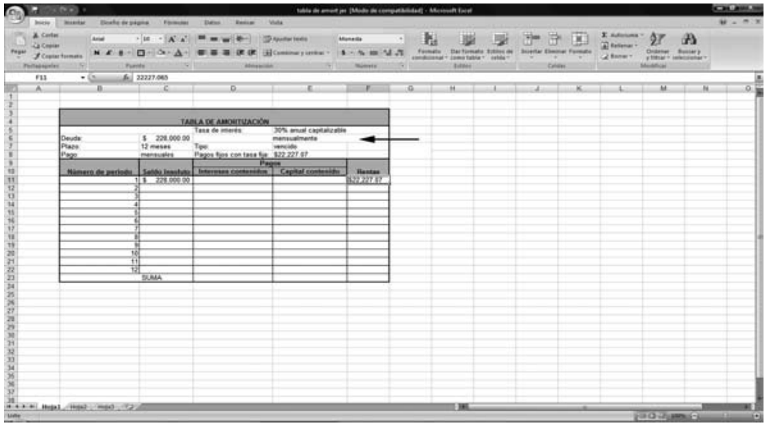
Dar "clic" en *Aceptar*



Para calcular la tabla de amortización se sugiere capturar previamente en la hoja de cálculo los encabezados básicos de una tabla de amortización (véase pantalla 1). Lo anterior tiene el objetivo de ordenar el proceso de cálculo; además se deben capturar los dos únicos valores conocidos: el *capital insoluto* al principio del primer periodo y el importe de la *renta* (o pago) que es fija durante todo el plazo de la operación.

Pantalla 1

Encabezados básicos para la elaboración de una tabla de amortización.



Cálculo de la columna *Intereses contenidos en el pago*.

Paso 7

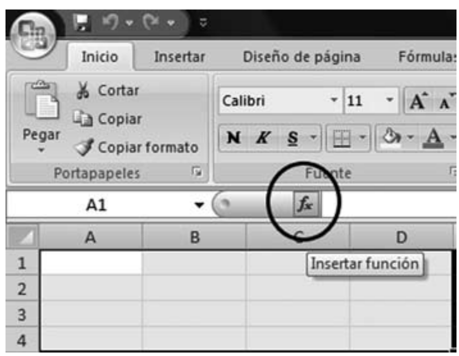
Se ubica el cursor en la primera celda de la columna *Intereses contenidos en el pago* (celda D11) y se procede al cálculo del *interés contenidos en el pago* utilizando la función financiera PAGOINT, cuyos argumentos son:

PAGOINT ***(tasa; periodo; nper; va; vf; tipo)***

Paso 7

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar* > *Función*

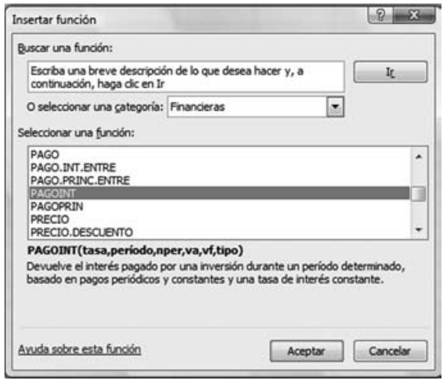


Paso 8

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría *Financieras*

Seleccionar la función financiera: *PAGOINT*

Dar “clic” en *Aceptar*



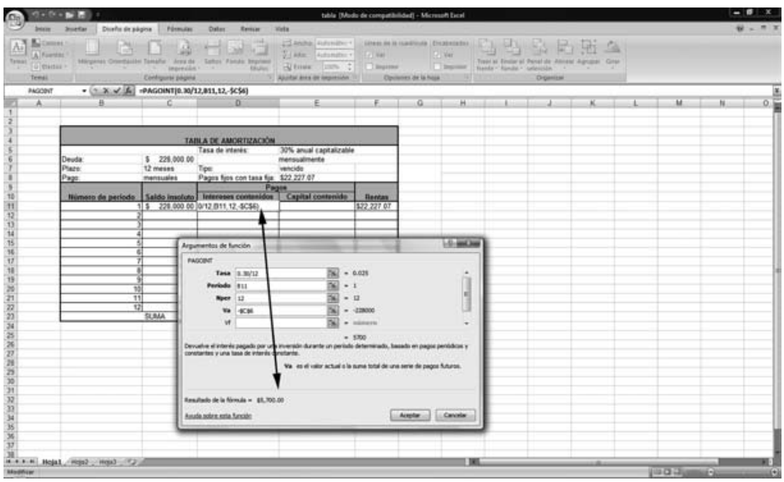
Observe la pantalla 2 en donde se establecen los parámetros a utilizar. Después de haber dado “clic” en *Aceptar*, se copia la función PAGOINT y se pega en las celdas subsecuentes de la columna para obtener los valores restantes:

Paso 9

Pantalla 2

Tasa 0.30/12
Periodo: B11
En este rubro se debe ubicar el cursor en la celda correspondiente al primer periodo de pago.
Nper: 12
Va: −228000
Se debe escribir directamente el importe de la deuda
Tipo 0.

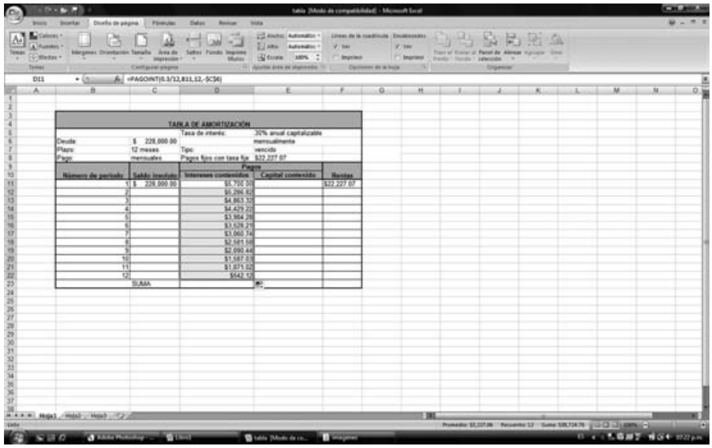
Dar “clic” en *Aceptar*



Paso 10

Pantalla 3

Una vez obtenido el interés contenido en el primer pago, el resto de la columna se calcula utilizando el *mouse*: colocar el cursor en la esquina inferior derecha de la celda D11 y mientras se mantiene presionado el botón izquierdo del *mouse*, "se arrastra" hacia abajo (en este ejemplo hasta el periodo 12); se suelta el botón. El resultado de este paso aparece en la zona sombreada.



Cálculo de la columna *Capital contenido en el pago*.

Pasos 11 y 12

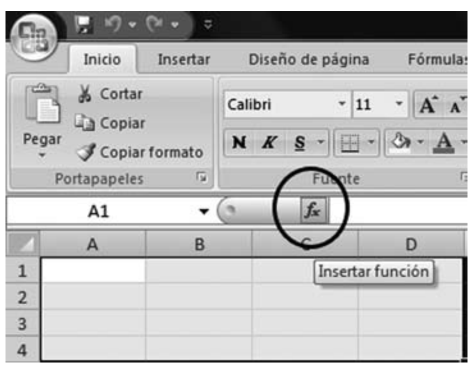
Para calcular la columna *Capital contenido en el pago* se debe ubicar el cursor en la celda de *Capital contenido en el primer pago* (celda E11); se emplea la función financiera PAGOPRIN, cuyos argumentos son:

PAGOPRIN (tasa; periodo; nper; va; vf; tipo)

Paso 11

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar > Función*

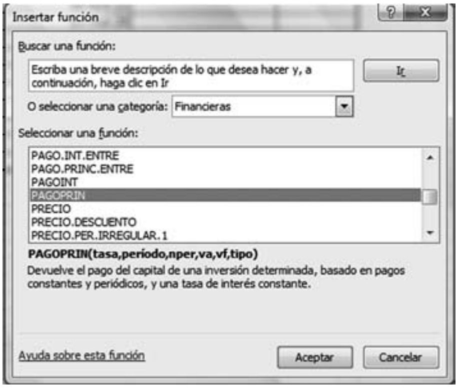


Paso 12

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría *Financieras*

Seleccionar la función financiera: *PAGOPRIN*

Dar "clic" en *Aceptar*

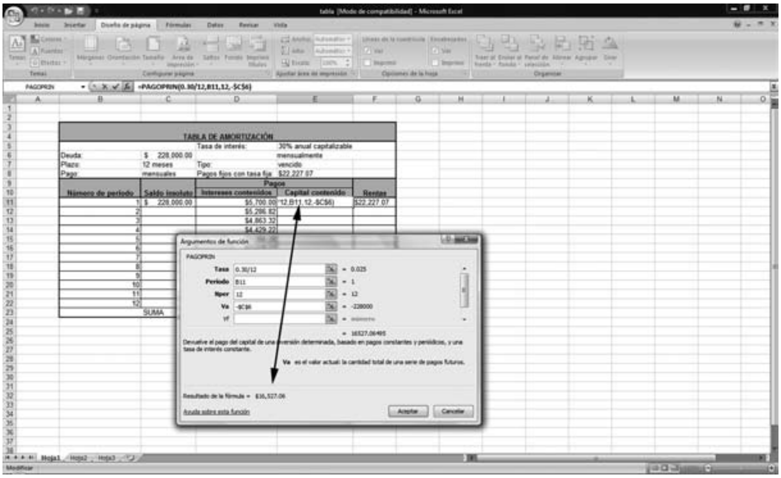


Paso 13

Pantalla 4

Tasa 0.30/12
Periodo: B11
En este rubro se debe ubicar el cursor en la celda correspondiente al primer periodo de pago.
Nper: 12
Va: –228000
Se debe escribir directamente el importe de la deuda.

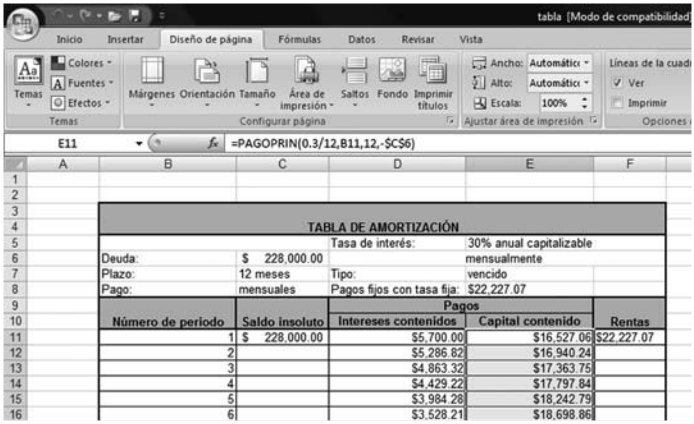
Dar "clic" en *Aceptar*



Paso 14

Pantalla 5

Una vez obtenido el capital contenido en el primer pago, el resto de la columna se calcula utilizando el *mouse*: colocar el cursor en la esquina inferior derecha de la celda E11 y mientras se mantiene presionado el botón izquierdo del *mouse*, "se arrastra" hacia abajo (en este ejemplo hasta el periodo 12); se suelta el botón. El resultado de este paso aparece en la zona sombreada.



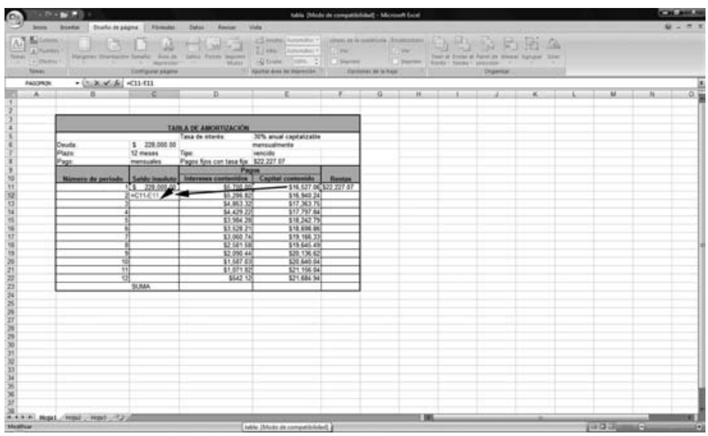
Cálculo de la columna *Capital insoluto al principio del periodo.*

Paso 15

Aquí sólo es necesario ejecutar una diferencia y copiar la operación al resto de la columna.

Pantalla 6

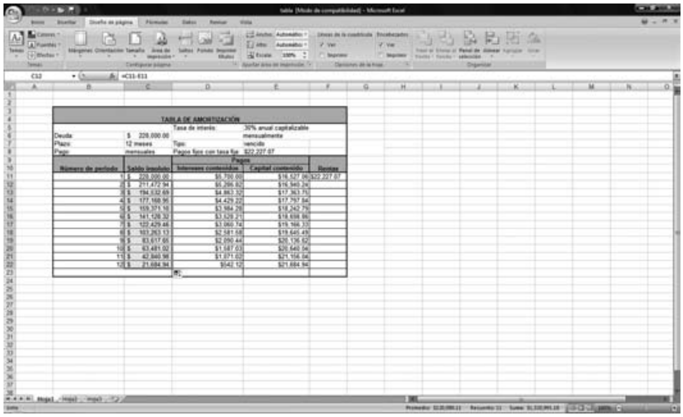
Ubicar el cursor en la celda del capital insoluto al principio del segundo periodo para ejecutar la operación: = C11 – E11 la diferencia del capital insoluto menos el capital contenido en el pago.



Paso 16

Pantalla 7

Una vez obtenido el capital insoluto al principio del segundo periodo, el resto de la columna se calcula utilizando el *mouse*: colocar el cursor en la esquina inferior derecha de la celda C12 y mientras se mantiene presionado el botón izquierdo del *mouse*, "se arrastra" hacia abajo (en este ejemplo hasta el periodo 12); se suelta el botón. El resultado de este paso aparece en la zona sombreada.



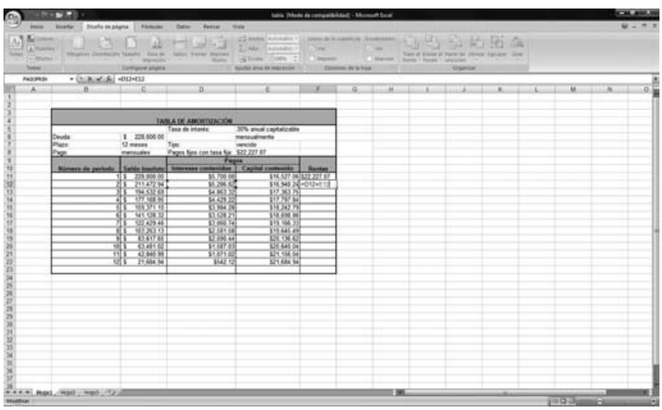
Control para calcular correctamente la tabla de amortización.

Este cálculo sólo sirve de control para asegurarse de que los cálculos previos se hicieron de forma correcta.

Paso 17

Pantalla 8

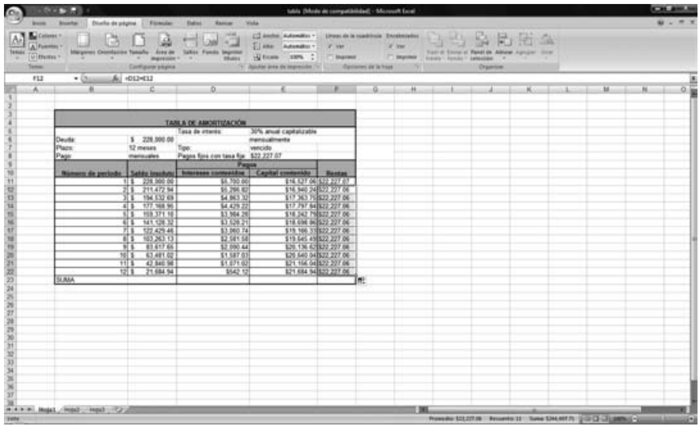
Para obtener la columna Renta se suman la celda del capital contenido en el pago y la de los intereses contenidos en el pago cuyo resultado debe ser igual al valor de la renta calculado inicialmente. (=D12+E12)



Paso 18

Pantalla 9

Una vez obtenido el importe de la renta en el segundo pago, el resto de la columna se calcula utilizando el *mouse*: colocar el cursor en la esquina inferior derecha de la celda F12 y mientras se mantiene presionado el botón izquierdo del *mouse*, "se arrastra" hacia abajo (en este ejemplo hasta el periodo 12); se suelta el botón. El resultado de este paso aparece en la zona sombreada.



Se sugiere ejecutar las sumas verticales para las columnas de *Intereses* y *Capital* contenido en el pago; esta última suma debe coincidir con el importe del préstamo.

Conclusiones

Para la extinción gradual de deudas se emplean actualmente varias metodologías: desde aquella donde el pago resulta de dividir el principal prestado, junto con sus respectivos intereses, por el número de pagos, hasta aquel en que se convierte el capital prestado a unidades de inversión para mantener el valor real del principal prestado; sin embargo, la metodología aquí presentada, que consiste en calcular la renta según el método prospectivo, es la que sustenta la teoría del interés para el pago de deudas de largo plazo. A partir de ella se pueden diseñar —como ha sucedido en la práctica— alternativas de pago, es decir, esquemas novedosos de pago que respeten el principio de equitatividad que debe regir en toda transacción financiera (véase el ejemplo 4 del capítulo 6).

Por último, con el empleo de las funciones financieras de Excel es posible agilizar el cálculo, no obstante que el empleo de una hoja electrónica también resulta suficiente.

Capítulo 7. Análisis de inversiones

Ejemplo 1 del capítulo 7

Una empresa tiene una alternativa de inversión: un proyecto consiste en adquirir maquinaria en \$6000000 con la que se espera mejorar el proceso de producción, el segundo proyecto le significa a la empresa un desembolso de $8000000 con lo que podrá reemplazar toda la maquinaria utilizada en la producción. Para cualquier proyecto se considera que el financiamiento es al 22% anual.

Los flujos futuros de efectivo estimados para ambos proyectos son los siguientes:

Cuadro 1

Periodo (años)	Flujos de efectivo Proyectos:	
	A	**B**
0	– $6000	– $8000
1	2000	1100
2	2400	1800
3	2600	2500
4	2800	3800
5	2200	4400

¿Cuál proyecto debe seleccionarse, de tal forma que la empresa obtenga la mayor rentabilidad?

Se emplearán los métodos del valor presente neto (o valor actual neto, VAN) y tasa interna de rendimiento (TIR) con sus respectivos criterios de decisión.

Las respectivas ecuaciones de valor son:

Proyecto A

$$2000(1 + i_A) + 2400(1 + i_A)^{-2} + 2600(1 + i_A)^{-3} + 2800(1 + i_A)^{-4} + 2200(1 + i_A)^{-5} - 6000 = VNA$$

Proyecto B

$$1100(1 + i_B) + 1800(1 + i_B)^{-2} + 2500(1 + i_B)^{-3} + 3800(1 + i_B)^{-4} + 4400(1 + i_A)^{-5} - 8000 = VNA$$

Conviene hacer las siguientes precisiones para el cálculo del valor presente neto empleando las funciones financieras de Excel:

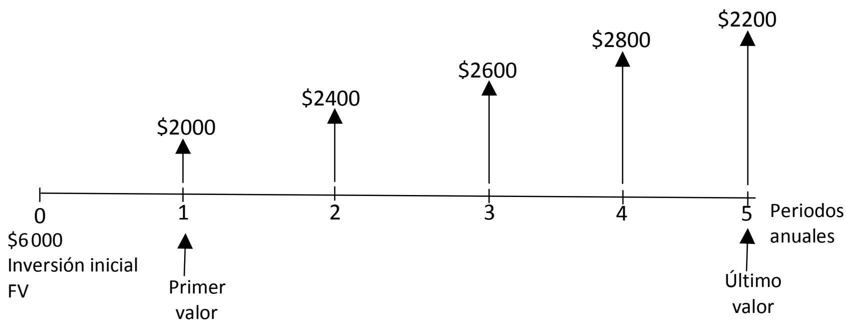
- Dependiendo de la versión empleada de Excel de Microsoft, al valor presente neto se le identifica como VPN (NPV si la versión es en inglés); o bien puede ser valor neto actual (VNA). La versión utilizada en este texto es la 2002 de Windows XP que identifica al VPN como VNA.
- La función financiera VNA es similar a la función VA (Valor Actual). La principal diferencia entre ambas es que VA permite que los flujos de efectivo comiencen al

final o al principio del periodo; los flujos de efectivo en va deben permanecer*constantes* durante la inversión, mientras que los flujos de efectivo en VNA puede ser *variables*.

- El cálculo del valor presente neto considera todos los flujos de efectivo (desde la inversión que se realiza al principio del primer periodo, hasta el último ingreso al finalizar la vida del proyecto).

  La función financiera VNA no incluye el flujo de efectivo al principio del primer periodo; éste se deberá restar al resultado que arroje la función VNA.

Los flujos de efectivo para calcular el valor neto actual (o valor presente neto) para el proyecto A, por ejemplo, son:



Se sugiere capturar en la hoja electrónica de cálculo los flujos de efectivo que se muestran en el diagrama.

Cálculo del valor neto actual (o valor presente neto)

La función financiera que debe emplearse es VNA, cuyos argumentos son:

VNA(tasa; valor 1; valor 2; …)

Paso 1

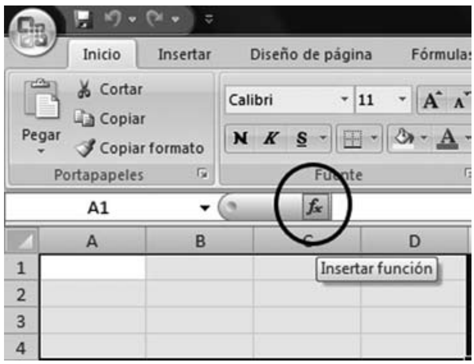
Se captura la tabla de flujos de efectivo para los proyectos de inversión.

	A	B
1	FLUJOS DE EFECTIVO	
2	Proyectos:	
3	A	B
4	-$6,000	-$8,000
5	$2,000	$1,100
6	$2,400	$1,800
7	$2,600	$2,500
8	$2,800	$3,800
9	$2,200	$4,400
10		
11		
12		

Paso 2

Dar un “clic” sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar* > *Función*



Paso 3

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría *Financieras*

Seleccionar la función financiera: *VNA*

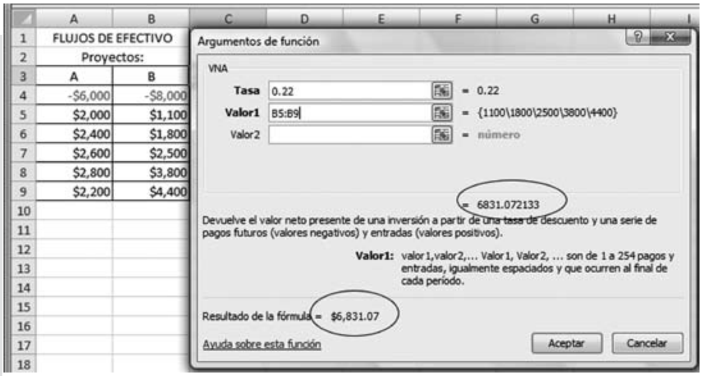
Dar “clic” en ***Aceptar***

Pasos 4 al 9

Se seleccionan los cinco flujos de efectivo que se refieren a ingresos (celdas A5 a A9)

Paso 4: Tasa 0.22
Paso 5: Valor 1, 2000
Paso 6: Valor 2, 2400
Paso 7: Valor 3, 2600
Paso 8: Valor 4, 2800
Paso 9: Valor 5, 2200

Dar "clic" en ***Aceptar***



Al valor resultante ($6761.57) se le suma algebraicamente el valor de la inversión (o desembolso inicial), -$6000; siguiendo la ecuación de valor del proyecto A:

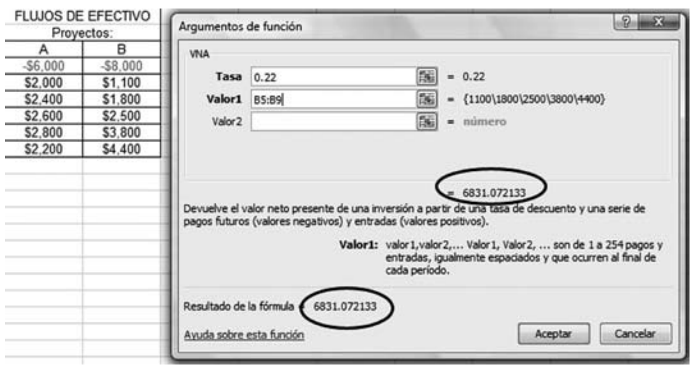
Valor neto actual = $6761.57 – $6000
VNA = $761.57.

De igual manera se obtiene el VNA para el Proyecto B.

Para llegar al cuadro de diálogo que se presenta, ya se han ejecutado los pasos del 1 al 8.

VNA (Proy. B)

Se seleccionan los cinco flujos de efectivo que se refieren a ingresos (celdas B5 a B9)



Al valor resultante se le suma algebraicamente el valor de la inversión (o desembolso inicial), –$8000.

Por lo tanto, el valor neto actual para el proyecto B es de:

$$\text{Valor neto actual} = \$6831.07 - \$8000$$
$$\text{VNA} = -\$1168.93$$

Cálculo de la tasa interna de rendimiento (TIR) de los proyectos A y B.

La función financiera que debe emplearse es TIR cuyos argumentos son:

TIR (valor; estimar)

Proyecto A

Paso 1

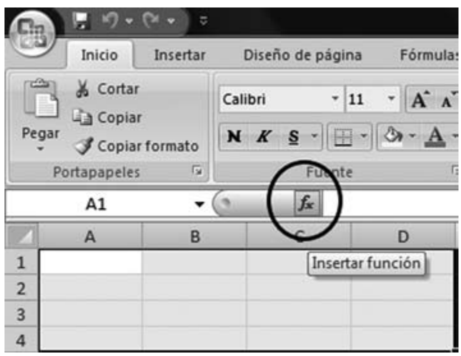
Se captura la tabla de flujos de efectivo para los proyectos de inversión.

	A	B	C	D	E
1		FLUJOS DE EFECTIVO			
2	Periodo	Proyectos:			
3	(años)	A	B		
4	0	-$6,000	-$8,000		
5	1	$2,000	$1,100		
6	2	$2,400	$1,800		
7	3	$2,600	$2,500		
8	4	$2,800	$3,800		
9	5	$2,200	$4,400		

Paso 2

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar* > *Función*

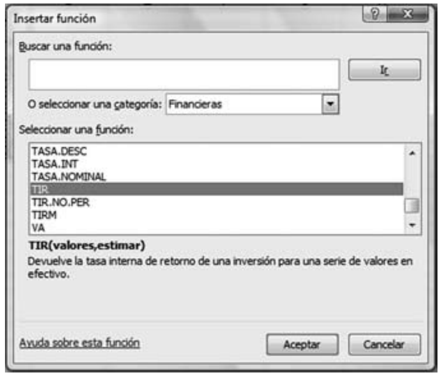


Paso 3

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría *Financieras*

Seleccionar la función financiera: *TIR*

Dar "clic" en *Aceptar*

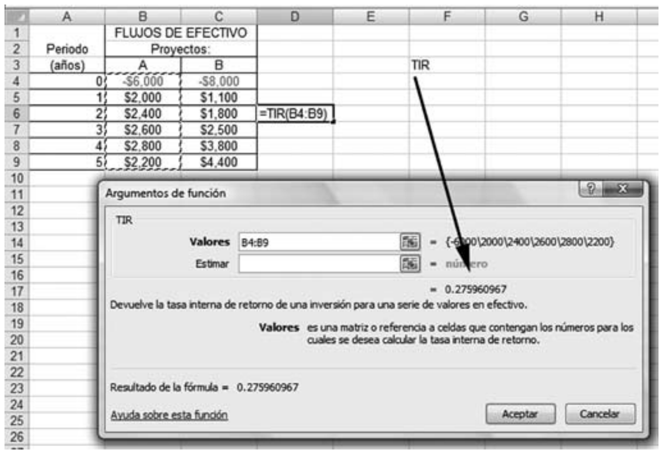


Pasos 4 y 5

Se seleccionan los seis flujos de efectivo que se refieren a ingresos y egresos (celdas B4 a B9)

Paso 4: Valores –6000, 2000, 2400, 2600, 2800, 2200

Paso5: Estimar, se recomienda ignorar (dejar en blanco)



Proyecto B

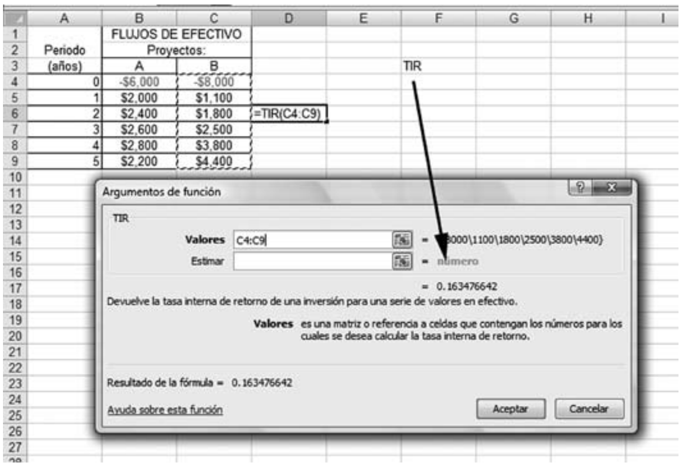
De la misma manera se calcula la tasa interna de rendimiento (TIR) para el proyecto B.

TIR

Se seleccionan los seis flujos de efectivo que se refieren a ingresos y egresos (celdas C4 a C9)

Paso 4: Valores −8000, 1100, 1800, 2500, 3800, 4400

Paso 5: Estimar, se recomienda ignorar (dejar en blanco)



Capítulo 8. Bonos

Ejemplo 2 del capítulo 8

Una empresa ha emitido 10000 bonos por un valor nominal de $1000 cada uno. Los bancos pagan un cupón de 5% y vencen a 5 años. ¿Cuál es el precio de compra del bono en la fecha de emisión si se descuentan con una tasa de interés de 10%?

La ecuación de valor que vincula las obligaciones de la empresa emisora y del comprador de los bonos es:

$$PC = 50\,(1+0.10)^{-1} + 50\,(1+0.10)^{-2} + 50\,(1+0.10)^{-3} + 50\,(1+0.10)^{-4} + 50\,(1+0.10)^{-5} + 1000\,(1+0.10)^{-5}$$

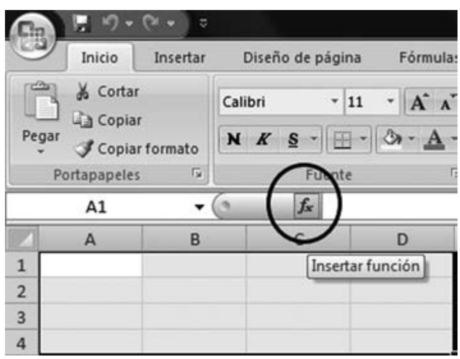
Para calcular el valor presente de los dividendos se utilizará la función financiera Valor Actual (VA), cuyos argumentos son:

VA (tasa; nper; pago; vf; tipo)

Paso 1

Dar un "clic" sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar* > *Función*

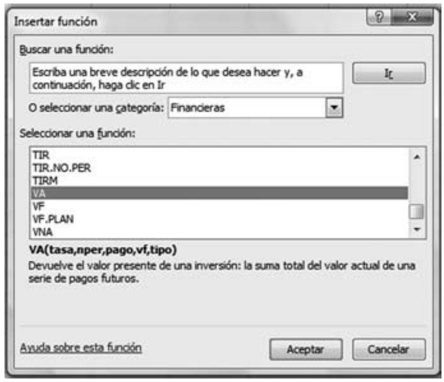


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría *Financieras*

Seleccionar la función financiera:
VA

Dar "clic" en *Aceptar*

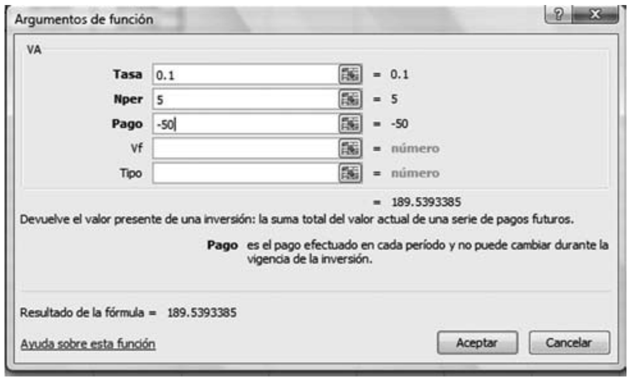


Pasos 3 al 6

Introducir los valores conocidos:

Paso 3: Tasa 0.1
Paso 4: Nper 5
Paso 5: Pago -50
Paso 6: Tipo 0

Dar "clic" en *Aceptar*



El valor actual o valor presente de los dividendos es de \$189.54.
De ahí que el precio unitario del bono es:

$$\therefore \quad PC = \$189.5393385 + \$620.921323$$
$$PC = \$810.460662$$

Ejemplo 3 del capítulo 8

El señor Romo desea ganar 18.5% de interés capitalizable cada mes de una inversión. ¿Cuánto deberá pagar hoy por una obligación que tiene un valor nominal de \$5000, si paga intereses mensuales a una tasa de 15% anual y su redención será a la par dentro de 5 años?

La ecuación de valor es:

$$VP = 62.50\left[\left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-1}+\left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-2}+\ldots+\left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-59}+\left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-60}\right]+5000\left(1+\frac{0.185}{12}\right)^{-60}$$

Para realizar esta operación por medio de las funciones financieras de Excel se debe conocer el valor presente del pago que recibirá el señor Romo por concepto de intereses; se trata de una serie geométrica de 60 pagos vencidos.

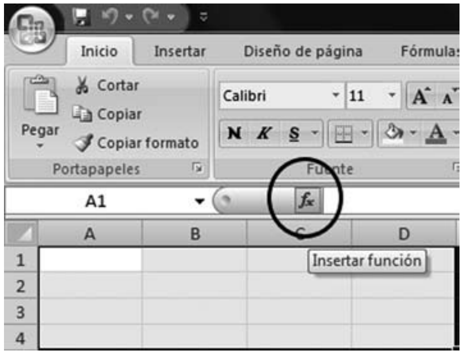
Se utilizará la función financiera Valor Actual (VA), cuyos argumentos son:

VA (tasa; nper; pago; vf; tipo)

Paso 1

Dar un “clic” sobre el icono Insertar Función* (*fx*)

* O bien, en el menú *Insertar > Función*

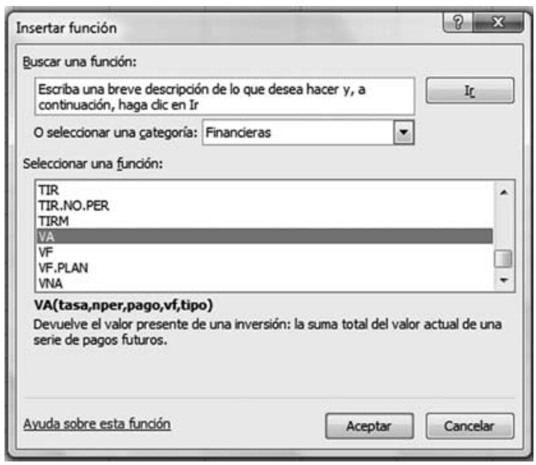


Paso 2

En el cuadro de texto, seleccionar la categoría ***Financieras***

Seleccionar la función financiera:
VA

Dar “clic” en ***Aceptar***

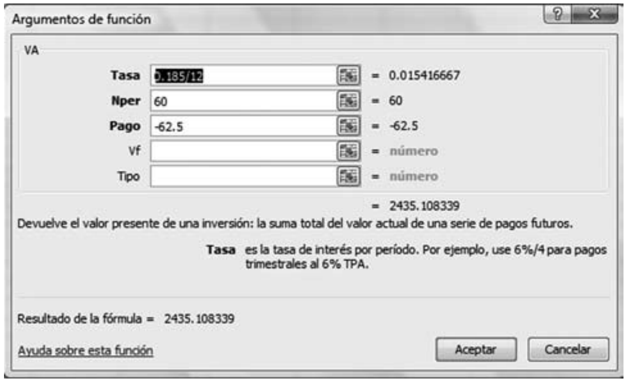


Pasos 3 al 6

Introducir los datos correspondientes de la primera serie de pagos:

Paso 3: Tasa 0.185/12
Paso 4: Nper 60
Paso 5: Pago -62.50
Paso 6: Tipo 0

Dar "clic" en ***Aceptar***



A continuación se calcula el valor presente del valor nominal utilizando también la función financiera Valor Actual (VA).

Pasos 7 al 10

Para calcular el valor presente de un solo pago:

Paso 7: Tasa 0.185/12
Paso 8: Nper 60
Paso 9: Vf – 5000
Paso 10: Tipo 0

Dar "clic" en ***Aceptar***

A continuación se suman los dos resultados obtenidos y se consigue el precio que deberá pagar el señor Romo por la obligación:

$VA = \$2435.11 + 1996.70$
$VA = \$4431.81$

Bibliografía

Besley, Scott y Eugene F. Brigham, *Fundamentos de administración financiera*, McGraw Hill, México, 2000.

Cissel, Robert *et al.*, *Matemáticas financieras*, cecsa, México, 2000.

Díaz Mata, Alfredo y Víctor M. Aguilera, *Matemáticas financieras*, McGraw Hill, México, 1999.

García González, Enrique, *Matemáticas financieras por medio de algoritmos, calculadora financiera y PC*, McGraw Hill, México, 1998.

Highland, H. Esther y Roberta S. Rosenbaum, *Matemáticas financieras*, Prentice Hall, México, 1996.

Lellison, Stephen G., *Theory of Interest*, McGraw Hill/Irwing, Illinois, 2008.

Moyer, Charles *et al.*, *Administración financiera contemporánea*, Thomson Editores, México, 2000.

Portus Lincoyán, G., *Matemáticas financieras*, McGraw Hill, Bogotá, 1997.

Roueche, Nelda W. y Virginia H. Graves, *Business Mathematics*, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1997.

Shao, Stephen P. y Lawrence Shao, *Mathematics for Management and Finance*, South Western Publishing Co., Cincinnati, 1990.

Vidaurri Aguirre, Héctor M., *Matemáticas financieras*, ecafsa, México, 2001.

Villalobos, José Luis, *Matemáticas financieras*, Prentice Hall, México, 2001.

Zima, Petr y Robert L. Brown, *Mathematics of Finance*, McGraw Hill, Nueva York, 1996.

Publicaciones

Las personas cometemos errores a cada momento a lo largo de nuestra vida; pero si nos equivocamos al elegir la administradora de nuestros ahorros obligatorios para el retiro o al aceptar las condiciones de la hipoteca de nuestra casa o bien al calcular los fondos disponibles para financiar el capital del trabajo, tales decisiones tendrán consecuencias catastróficas irreversibles. El manejo del dinero siempre ha sido tema de interés para quienes lo poseen y para quienes desean formar un patrimonio; para ello se pueden emplear medios informales o bien la información precisa para entender los riesgos y oportunidades que se presentan en un negocio.

En este libro el lector aprenderá las técnicas y modelos de las matemáticas financieras para tomar decisiones informadas sobre el ahorro, el crédito y la inversión; además, se podrá determinar su costo y rentabilidad efectiva.

En esta obra se emplea profusamente el diagrama de tiempo y valor para que mediante el principio de equitatividad que rige a toda transacción financiera –"en un negocio todos ganan"– se establezca una ecuación de valor; con esta técnica se evita la memorización de fórmulas y se capacita al lector para resolver cualquier problema que involucre dinero en el tiempo; no obstante, al final de cada capítulo se presentan las expresiones matemáticas propias del tema y consejos prácticos que aun al lector más atento le serán de mucha ayuda. Esta obra se encuentra completamente actualizada pues refleja los cambios significativos en el cálculo de anualidades –series de pagos– y tablas de amortización mediante las funciones financieras de Excel para lo cual se pone énfasis en el cálculo de tasas de interés equivalentes.

Por lo anterior este libro podrá ser consultado por estudiantes de las licenciaturas en economía, administración, contabilidad e incluso actuaría e ingeniería (si no les importan las demostraciones) o por cualquier persona con habilidades en el álgebra y en el manejo elemental de una hoja electrónica de cálculo que desee adquirir los conocimientos necesarios para adentrarse a las finanzas; asimismo, puede ser consultado por estudiantes de cursos propedéuticos para maestrías en finanzas. Esta obra contribuye así a la promoción de la cultura financiera y a la bancarización.

ISBN 978-970-31-1000-1
9 789703 110001