7

AHORRO E INFLACIÓN

UNA APLICACIÓN DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO DE UN PROBLEMA FINANCIERO

Raúl Yáñez Alcántara

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD XOCHIMILCO División de Ciencias Sociales y Humanidades

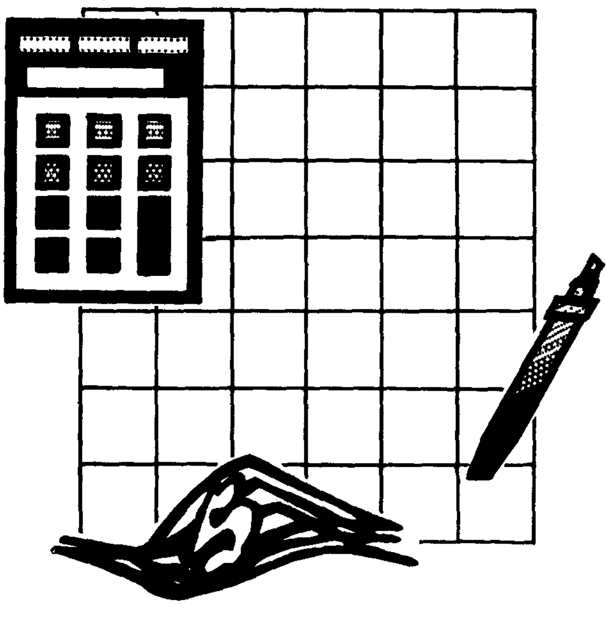
COLECCION LA LLAVE 7

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo UNIDAD XOCHIMILCO División de Ciencias Sociales y Humanidades

AHORRO E INFLACIÓN

UNA APLICACIÓN DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO DE UN PROBLEMA FINANCIERO



Raúl Yáñez Alcántara

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Rector General, doctor Gustavo Chapela Castañares
Secretario General, doctor Enrique Fernández Fassnacht

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-XOCHIMILCO
Rector, doctor Avedis Aznavurian Apajian
Secretaria de la Unidad, maestra Magdalena Fresán Orozco

DIVISION DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES
Director, maestro Felipe Campuzano Volpe
Secretaria Académica, licenciada Patricia Ortega Ramírez
Responsable de Publicaciones de la DCSH, licenciada Araceli Soní Soto

Edición y corrección: Salvador González Vilchis

COMITE EDITORIAL
Cuauhtémoc V. Pérez Llanas / Consuelo Beas / Guillermina Bringas / Enrique Cerón / Gabriela Dutrénit / Alejandro Gálvez Cansino / Humberto Ontiveros / Patricia Ortega / Alberto Padilla / Eugenia Vilar

Primera edición, 1993

D.R. © 1993. Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Xochimilco
Calzada del Hueso 1100
Col. Villa Quietud, Coyoacán
04960, México, D.F.

ISBN 970-620-180-7

Impreso y hecho en México / Printed and Made in Mexico

Indice

Prefacio 9

I. El razonamiento en la matemática 11
1. Introducción 11
2. La clase del objeto de estudio 12
3. El carácter de las expresiones 15
4. El método 17
4.1 Elementos primitivos y elementos definidos 19
5. La verdad en las proposiciones 21
6. El razonamiento 26
7. Los tipos fundamentales del razonamiento 31
a) Demostración directa y desarrollo 33
b) Demostración indirecta o por reducción al absurdo 35
c) Demostración por inducción matemática 37

II. Ahorro e inflación (una aplicación del razonamiento matemático en la solución de un problema de matemáticas financieras) 43
1. Introducción 43
2. Los supuestos del modelo 44
3. Desarrollo del modelo 46
4. Demostración, por inducción matemática, de la validez de la fórmula 51
5. Modelo alternativo 54
6. Las preguntas del señor Jr. y las fórmulas adicionales 55
6.1. El ahorro disponible en un tiempo determinado 55
6.2. El ahorro del señor Jr. se esfuma 58

7. En busca de alternativas de inversión 59
7.1. El ánimo del señor Jr. se reconforta 60
8. El señor Jr. considera una alternativa egoísta 64
9. La utilidad del modelo 66

Anexos

1. Demostración de la primera opción 73
2. Deducción del período t en el que el ahorro se anula 77
3. Comportamiento del ahorro como una consecuencia de la relación entre la tasa de interés nominal y la tasa de inflación . . 80
4. Comportamiento del ahorro como resultado de la adopción de un nivel de gasto inicial y de una tasa de interés real positiva . . 84
5. Deducción de la fórmula para obtener el capital inicial necesario para mantener un nivel de gasto constante en términos reales y que extinga el ahorro en un tiempo t determinado 88

Glosario 91

Bibliografía 93

Prefacio

Desde la creación del conocimiento matemático, el ser humano lo ha aplicado a múltiples actividades prácticas. No obstante, no es la relación entre la actividad razonada de la matemática y la solución de los problemas empíricos lo que ha hecho evolucionar a esta ciencia, aunque sí le ha permitido enterarse de temas para desarrollar una teoría.

Sin embargo, la ayuda que la matemática ha prestado a las demás ciencias, es decir, cuando se utiliza como una disciplina auxiliar, sí ha ocasionado que éstas incrementen su capacidad creadora en el área de la realidad que les corresponde estudiar.

A pesar de que este es un hecho importante son escasos los textos que se abocan a describir ese proceso de simbiosis, que de ser abordado con claridad, podría ayudar a comprender de mejor forma el por qué múltiples aspectos de la economía se pueden describir adecuadamente cuando se utiliza el instrumental matemático, fortaleciendo así la comprensión para usar a la matemática como una ciencia auxiliar; por ejemplo, para el desarrollo del análisis económico.

Este trabajo tiene una doble finalidad. Por un lado trata de contribuir a la comprensión del porqué y el cómo se utiliza a la matemática como un auxiliar básico del análisis de las variables económicas. Para lograr el propósito, se considera necesario abordar en la primera parte algunos aspectos de la caracterización de la matemática como ciencia, enfatizando el método, el proceso de razonamiento que se permite la construcción del conocimiento matemático, como la parte fundamental de esta rama del saber.

Además, y como consecuencia de lo anterior, se utiliza al razonamiento matemático en la solución de un problema perteneciente al ámbito de las matemáticas financieras, que es el objetivo de la segunda parte del documento.

El tema escogido: Ahorro e inflación, nos indica la temática a desarrollar. ¿Qué sucede en esa relación?

En principio, el caso general es aquel en que se tiene un dinero ahorrado y se vive de él, sin agregar alguna cantidad. Los demás casos, que se desprenden del anterior, podrían considerarse como deducidos y son una consecuencia de considerar dos aspectos: el razonamiento y los conceptos de la matemática y la aplicacion para resolver problemas específicos.

Del hecho, de abordar el caso general, se deducen las particularidades de otras circunstancias, que están implícitas en la relación mencionada y surgen al contestar preguntas, como: ¿cuánto dura un monto de ahorro inicial, realizando un gasto determinado?; ¿cuál relación, entre ahorro e inflación es mejor para una mayor duración del ahorro?; ¿cuánto se puede ahorrar ahora para mantener un nivel de vida constante a lo largo de un período determinado? Estas son algunas consideraciones que se abordan y expresan la potencialidad del uso de la matemática como una herramienta de la economía.

RYA

I. El razonamiento en la matemática

1. Introducción

El hombre, en la acción de conocer al mundo, que lo inscribe como un ser interactuante, ha establecido procesos racionales que le permiten explicárselo en forma adecuada y de acuerdo con determinados objetivos.

Si bien es cierto que la realidad es un todo que se presenta ante el ser humano en forma compleja, ello no es un obstáculo insalvable para los fines que ha establecido en su relación con la naturaleza y, por el contrario de mantener una actitud contemplativa ante su magnificencia, trata de comprenderla, explicarla y transformarla.

Uno de los procedimientos racionales que ha adoptado para lograr esos objetivos es la demarcación, mediante áreas de estudio, de los conocimientos que adquiere.

En el proceso de conocer a la realidad, se conjuga una doble situación; por un lado, el ser humano comprende que el comportamiento de diversos fenómenos está relacionado con el de otros y, en consecuencia, su acontecer no se puede explicar en forma aislada. Pero, por otra parte, también entiende que el suceder de algunos no afecta, al menos no lo hace en forma importante, para el desarrollo de otros.

Con esta doble situación en mente, logra que la separación y la conjunción de las propiedades de los fenómenos sean la base para la creación de las áreas del saber, relacionando o separando los conocimientos, que dan origen a las disciplinas científicas.

La construcción de las ciencias implica la necesidad inicial de ubicar a los fenómenos en áreas determinadas y así, por medio de un procedimiento racional pertinente, obtener de ellos una serie de conocimientos que pretenden abarcar las diferentes posibilidades que los determinan como objetos de estudio.

La forma de obtener los conocimientos es diversa, según sea la clase de objeto que se estudie, pero las distintas modalidades tienen una característica en común: son procesos racionales que, a lo largo de la historia, ha ido perfeccionando el ser humano.

A estos procesos racionales, que permiten al hombre generar conocimiento en forma sistematizada, se les denomina métodos de la ciencia.

Considerando los elementos anteriormente mencionados, se puede afirmar que las ciencias se diferencian por el tipo de conocimiento que las produce y por los procesos racionales que les permiten encontrar y desarrollar los contenidos que les competen.

2. La clase del objeto de estudio

En la realidad podemos distinguir a los objetos de estudio de tipo formal de los de tipo empírico. En la primer clase se ubican los conceptos, que son la base de las ciencias formales y entre ellas está la matemática. Ésta es una ciencia de tipo formal que tiene como objetos de estudio a entes conceptuales, desprendidos de toda relación con el mundo físico o con la actividad práctica del ser humano. Esta idea de la matemática no implica pensar que tales conceptos no se deriven de la realidad empírica o no se apliquen con éxito a múltiples problemas que enfrenta el hombre, pero el que esas relaciones se cumplan no interesa para el desarrollo de los conocimientos en la, a veces llamada, ciencia de los números.

Al científico de esta área del saber no le interesa estudiar las formas en que un concepto se aplica en la realidad concreta y permite resolver problemas prácticos. Lo que le incumbe es la generación del conocimiento por medio de la comprensión, metódicamente elaborada, de las propiedades que el objeto presenta en su condición de concepto, desprendido de su relación con el mundo empírico.

Sin duda, una gran cantidad de conceptos de la matemática son utilizados por la generalidad de los hombres en numerosas cuestiones prácticas: los números y las operaciones algebraicas, el concepto de triángulo, los desarrollos del cálculo y muchos más elementos están presentes en nuestra mente para solucionar algún problema concreto de la vida diaria.

Pero, aunque en primera instancia y en forma directa, la mente los contempla como propiedades de los objetos materiales en los que se aplican, basta con intentar la definición de los conceptos, y entenderlos como objetos de estudio, para comprender que su aplicación en entidades del mundo físico es el resultado de su existencia conceptual y no una propiedad que se desprende de un objeto concreto. Esos conceptos, contemplados en su dimensión formal son el origen de diversas propiedades que permiten aplicación a una gran diversidad de casos de la práctica cotidiana.

Por ejemplo, en el caso del concepto "número", se descubre que su estudio no se ubica en nivel concreto alguno, no pertenece a un objeto en particular, pero si se aplica a diversas entidades, no necesariamente de la misma clase; su creación como concepto tampoco existe como consecuencia de una definición.

En la construcción de la teoría, que toma al número como objeto de análisis, sólo se considera que basta declarar su existencia para obtener, en conjunción con los conceptos de operaciones algebraicas, una serie de propiedades que permiten aplicarla con éxito a problemas prácticos, esto sucede aun cuando dicho concepto únicamente es producto de una relación entre entidades, también conceptuales, denominados "conjuntos".

Otros conceptos, como el de "triángulo plano", se pueden definir, pero los elementos que intervienen en la definición pertenecen también a la clase de los objetos formales, que, a su vez, deben existir anteriormente como conceptos, que pueden o no ser definidos.

Por caso, tomemos la definición de triángulo plano que se encuentra en el *Diccionario Rioduero* de Matemáticas: "figura geométrica determinada por tres rectas que se cortan en tres puntos diferentes" (pág 212).

Es claro que si no tenemos la noción de lo que es un triángulo, tendríamos que recurrir a la definición para asimilar el concepto, aunque también una imagen podría darnos un acercamiento para lograr la adquisición del mismo.

Si lo primero fuera el caso, para comprender de qué se habla, es decir obtener el concepto, necesitaríamos tener la intuición de lo que es una figura geométrica; deberíamos comprender el concepto de recta y haber asimilado el significado de lo que es un "corte entre rectas", elementos que sólo tienen sentido en su carácter de objetos formales de estudio. Pronto llegaríamos a la conclusión de que el concepto de triángulo únicamente puede comprenderse como una entidad abstracta y como parte del contenido de una ciencia formal.

Es así que, aunque este último concepto tiene variadas aplicaciones en el mundo empírico, como lo es medir distancias inaccesibles; no es esto lo que pertenece al área de estudio de la matemática. Lo que importa para construir esta ciencia es descubrir y sistematizar las propiedades que se encuentran en el concepto triángulo, como son: "En todo triángulo plano, la suma de los ángulos internos es 180 grados" o "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Como nuevamente se puede observar, los conceptos que intervienen en cada propiedad: suma, ángulo, grados, hipotenusa y catetos nos proporcionan los elementos para la comprensión de lo que significan las propiedades, pero en ellos no encontramos la referencia al mundo empírico, conservándose su carácter de conceptos utilizados en la generación de conocimientos en la matemática.

No obstante, es necesario insistir que la presencia de la realidad empírica no es desdeñable para el quehacer matemático y que los primeros conceptos de la matemática, al igual que muchos de los posteriores, tienen un origen práctico, pero mientras conservaron esa relación no podían servir para el desarrollo de esta disciplina; ellos debían abstraerse de su contenido empírico para convertirse en objetos del razonamiento de la matemática

La historia nos enseña que en el Egipto y la Mesopotamia antiguos, donde no existía aún la matemática como ciencia, se conocían algunas propiedades de los triángulos, pero fueron éstas el producto de manejar casos concretos y aplicaciones a problemas específicos; no obstante y en forma desconcertante, en ambas civilizaciones se encuentran vestigios de una civilización avanzada en aspectos de ingeniería y arquitectura.

Aún en la actualidad, en la creación del conocimiento en matemáticas, la realidad concreta sugiere problemas que, al conceptualizarse, dan origen a contenidos propios de esta ciencia, pero, por otro lado, también es cierto que el propio proceso de razonamiento produce conceptos con base en conceptos, los que posteriormente encuentran alguna aplicación práctica o permanecen en su calidad de entes abstractos, permitiendo en ambos casos el desarrollo de diversas ramas del conocimiento matemático.

3. El carácter de las expresiones

Si los objetos de estudio de la matemática únicamente tienen sentido, en la elaboración del conocimiento, como entes conceptuales, desprovistos de su relación con el mundo empírico y habiéndose establecido además que los científicos de esta área del conocimiento obtienen metódicamente las propiedades que están presentes en tales objetos de estudio; si se ha planteado lo anterior, entonces, y en forma necesaria, debe pensarse que las proposiciones que se crean para construir a esta ciencia deben involucrar tales características, de ahí que cabe preguntar lo siguiente: ¿Qué expresan los enunciados pertenecientes a la matemática?; ¿Cómo obtenerlos?; ¿Cuál es el criterio de verdad que se desprende de ellos?; ¿Qué relación existe entre las diversas expresiones que componen a esta ciencia?

En principio, podemos decir que las expresiones matemáticas se refieren a los entes conceptuales establecidos como objetos de estudio y exclusivamente pueden comprenderse en referencia a ellos, no tienen significado en términos empíricos, puesto que lo que expresan se refiere a objetos sin ese carácter.

A manera de aclarar, supongamos las proposiciones siguientes: "Si a y b son números reales, entonces $a+b$ es un número real "y" La suma de los ángulos internos de un triángulo plano es 180 grados". En estas proposiciones, que en matemáticas tienen la característica de ser verdaderas, observamos que su construcción no difiere sustancialmente de la forma en que se construyen las proposiciones en otras áreas del saber: se enuncia un sujeto, por ejemplo "los números a y b" o "los ángulos internos de un triángulo plano" y se hace explícita una propiedad que les pertenece "$a+b$ es un número real" en el primer caso y, "suman 180 grados", en el segundo.

En ambas proposiciones, se observa que únicamente pueden comprenderse en términos de lo que significan los conceptos que contienen en este caso: número real, suma de números, igualdad de cantidades, triángulo, ángulos internos y grados, siendo todos ellos elementos conceptuales y no importando si los números mencionados están asociados con elementos particulares del mundo físico o si los triángulos permiten generar elementos arquitectónicos.

Cabe notar que en la construcción de las proposiciones en matemáticas, como en las de otro tipo, es importante la consideración de las reglas de la sintaxis y el sentido semántico de los elementos que la componen.

En el primer caso, en la sintaxis, como ya se expresó no existe diferencia sustancial con otro tipo de proposiciones, pero en el carácter semántico interviene la comprensión adecuada de los conceptos que estudia esta ciencia y sólo puede entenderse una proposición cuando se ha asimilado lo que significa cada uno de sus componentes.

Por ejemplo, si decimos que "a" es un número real y los caracteres: "+","=" y "%" toman el sentido usual que la matemática les da; a saber: "suma de reales", "igual" y "por ciento", respectivamente, entonces la expresión "$a+a=\%$" no tiene sentido semántico para esta ciencia.

Es obvio que la comprensión de los conceptos matemáticos es lo que nos permite realizar la construcción de proposiciones sintáctica y semánticamente adecuadas para su uso en la matemática.

Continuando con la respuesta a las otras preguntas, es conveniente dejar de lado la segunda de ellas: ¿Cómo obtener las proposiciones en matemáticas?, para contestarla posteriormente con la elaboración de un modelo relacionado con un problema financiero y pasar a abordar a continuación la respuesta a las preguntas restantes.

Para ello, es conveniente que a los ejemplos ya expresados se adicione la siguiente proposición :

"el número raíz cuadrada de dos no es un número racional" o equivalentemente "$\sqrt{2} \neq p/q$, donde p y q son números enteros y q es distinto de cero".

En los textos de matemáticas, que contienen a esta proposición, se demuestra que es una expresión verdadera. Pero, nuevamente se observa que en ella no se expresa alguna relación con el mundo empírico.

Luego, ¿de dónde deriva su certidumbre?, si las expresiones en matemáticas se refieren a entes abstractos sin referencia empírica, ¿cuál es el criterio de verdad que las sustenta?

La respuesta se obtiene al considerar el carácter lógico del proceso de construcción de las proposiciones que surgen de las propiedades de los conceptos matemáticos. Para ello es necesario comprender cómo funciona el método de la matemática.

4. El método

La matemática es una ciencia histórica, es decir, se ha ido construyendo y perfeccionando sin cesar a lo largo de la historia humana y sus primeros elementos tienen un indudable principio empírico.

Las narraciones históricas nos indican que la necesidad de contar, o la de medir, trajeron como consecuencia la aparición de los conceptos de número y de diversas figuras geométricas, así como la idea de algunas relaciones, como la de igualdad, la de menor o igual, etcétera.

Pero esto fue sólo el inicio de su elaboración como disciplina científica.

Desde la invención de los primeros conceptos en la prehistoria, pasó un tiempo considerable hasta que, en la civilización griega de la antigüedad, se abordara metódicamente el problema de la abstracción de los conceptos y la generalización de sus propiedades. Puede decirse que este hecho permitió a esos pensadores de la Península Helénica darle la estructura lógica que le permitió desarrollarse como ciencia.

Con los griegos, la matemática dejó de ser un compendio de conocimientos particulares y empíricos para adquirir el rango de ciencia abstracta y generalizadora.

Los conceptos de la matemática, a partir de entonces no pertenecen a un caso en particular de la realidad; por el contrario, se abstrae esa relación entre concepto y aplicación concreta para estudiar sus propiedades en forma conceptual y aplicarlas posteriormente en una generalidad de casos de la actividad práctica.

Es así que la matemática se convierte en una ciencia abstracta, como resultado de que se desprende a los conceptos de sus rasgos de empiricidad, para estudiar a sus propiedades como entidades de un proceso formal. Pero también es generalizadora, porque las propiedades que se obtienen corresponden a todos los elementos que pertenecen a una clase determinada y no a un caso en particular.

La historia de la matemática registra que entre los pensadores griegos, con aportaciones a su fundamentación como ciencia, destacan con gran notabilidad Thales de Mileto (640-550 a.C.) y Pitágoras de Samos (569-500 a.C.) como los iniciadores del proceso de razonamiento característico del pensamiento matemático y, Euclides (330-275 a.C.) como el gran recopilador de los conocimientos matemáticos existentes en su época y el sistematizador del método de la matemática, aspectos que están presentes en su obra *Los Elementos*.

Desde la obra de Euclides, el matemático adquirió el contexto racional, que le ha permitido darle un fundamento conceptual sólido, para obtener el conocimiento en esta área del saber y construir a la matemática como ciencia.

Puede desprenderse de lo anterior que el método de estudio caracteriza a esta ciencia y la determina como disciplina científica. Esto es así, porque el objeto sobre el que recae la reflexión del matemático es, como se ha mencionado anteriormente, un ente intangible y carente de significado, fuera de una posible definición, que le da a lo más una existencia formal y que, a lo largo de la historia, ha variado en su contenido.

Las matemáticas de ahora, respecto a los temas que aborda, son notablemente distintas de las existentes en otros períodos de la historia. Pero, el método, que no ha variado significativamente desde su utilización por los griegos, surge como un instrumento poderoso para ampliar los conocimientos del saber matemático e, inclusive, caracterizar a la matemática y particularizarla como una disciplina científica.

El método de la matemática, que llamaremos *axiomático-deductivo*, consiste en un proceso de razonamiento que involucra a la elaboración de los conceptos iniciales del razonamiento (elementos primitivos), el establecimiento de una serie de propiedades básicas sobre tales elementos y, por medio de razonamientos aceptados, la generación de nuevos conceptos (llamados definidos) y de propiedades adicionales sobre ambas clases de elementos.

4.1. Elementos primitivos y elementos definidos

El conocimiento matemático se obtiene por medio de un procedimiento racional que acepta o prueba la veracidad de una proposición, la cual es del tipo : "si, entonces". Es decir, tienen la estructura condicional que indica lo siguiente: si se cumple esta condición, entonces esta propiedad es cierta; por ejemplo : "si a y b son números reales, entonces $a+b$ es un número real"; "si es un triángulo plano, entonces sus ángulos internos suman 180 grados".

Como se puede observar en la estructura de las proposiciones intervienen objetos, como los números reales, los triángulos, etcétera, y una o varias propiedades, sobre las cuales habrá que decidir su veracidad: "$a+b$ es un número real" o "la suma de los ángulos internos de un triángulo plano es 180 grados".

En la estructura del razonamiento matemático, los elementos conceptuales u objetos de estudio, sobre los que se crean las proposiciones, están sujetos, por el mismo proceso, a tener el carácter de objetos definidos u objetos no definibles.

Para todos los objetos de estudio de la matemática se cumple esa condición y para precisar su carácter, se considera la necesidad de sólo declarar su presencia como elemento del razonamiento o establecer su definición, teniendo en este último caso, como base de la definicion, la existencia de elementos anteriormente conceptualizados.

Queda claro que no todos los elementos pueden ser definidos, ya que en caso de intentar definir a cada uno, tendríamos una lista interminable de elementos y una cadena infinita de definiciones.

El método de la matemática nos evita este problema, porque si bien es cierto que la creación de los conceptos matemáticos no es limitada, sino que su número se ha acrecentado a lo largo de la historia humana, la construcción de una lista interminable para lograr las definiciones requeridas no es posible, pero tampoco es necesaria.

El razonamiento matemático no se detiene ante la dificultad que implica el no poder definir a todos los elementos con base en otros ya definidos.

En la estructura de razonamiento de la matemática, algunos elementos se establecen para estudiarlos sin definirlos, a ellos se les denomina "elementos primitivos".

Esta circunstancia, de no ser definidos, no origina problemas grandes en la construcción del conocimiento, puesto que el trabajo con ellos induce la idea de lo que son, de algunas de las propiedades que poseen y como aplicarlos.

Por ejemplo, los números naturales y las operaciones juegan ese papel en la aritmética; no se definen, pero se entiende lo que significan, se conocen algunas propiedades y se sabe cómo utilizarlos. Asimismo el punto y la recta juegan ese papel en la geometría.

En ambos casos, lo que se sabe de ellos permite obviar su definición para únicamente considerar su existencia y aceptarlos como conceptos no definibles.

Por otro lado, no todos los elementos son primitivos, es más, exclusivamente unos cuantos deben serlo, habiendo bastantes más que no pueden estar en esa condición.

Pero, ¿por qué no todos los elementos son primitivos?; ¿qué impide el que aceptemos la existencia de los elementos a estudiar sin definirlos?

La cuestión anterior se puede contestar de la siguiente manera: en el desarrollo de la matemática, diversos conceptos se han creado a partir de otros ya conocidos; son la consecuencia de desarrollar los conocimientos existentes para un determinado grupo de conceptos. Por ejemplo, la derivación de los números racionales, que son una consecuencia de la existencia de los números enteros, permite ampliar los conocimientos sobre los números en general y sirven de base para obtener los números irracionales.

En el proceso racional, el desenvolvimiento del saber permite la elaboración de nuevos conceptos a partir de los ya existentes; la presencia de los más recientes, en gran parte, es producto de que otros le anteceden y si ese es el hecho lógico en el desarrollo de este tipo de conocimiento, cuestión que además no produce problemas en el rigor de la ciencia, entonces lo consecuente es aceptar, como necesaria, la circunstancia de la definición. Exclusivamente en el caso de que no existan antecedentes que nos conduzcan a definir nuevos conceptos con base en los anteriores, se aceptarán elementos primitivos.

Es así que, en la matemática, los entes conceptuales, sus objetos de estudio, son definidos o no definibles, siendo estos últimos sólo unos cuantos y de los cuales únicamente se considera su existencia, incluso alejada de cualquier connotación empírica y, por otro lado, los elementos definidos son la consecuencia de haber conceptualizado a los elementos primitivos.

Ambos elementos son indispensables en la utilización del método, pero no son suficientes para la edificación de esta ciencia, se debe adicionar una cuestión fundamental: en la construcción de la matemática, es imprescindible el proceso lógico que nos induce a considerar la verdad o la falsedad de los enunciados de esta ciencia.

5. La verdad en las proposiciones

Una de las características de la ciencia en general es que las proposiciones que forman parte de un cuerpo teórico, perteneciente a su área de estudio, tengan un criterio que permita aceptarlas como verdaderas y con base en ellas generar una teoría.

Esto es, existe un criterio de veracidad para aceptar a una determinada proposición como cierta para esa ciencia.

En el caso de las ciencias empíricas, que tienen su referencia en la naturaleza o en la actividad práctica del ser humano, se considera que la probabilidad de su aplicación, en tal realidad, es un criterio adecuado para aceptar que un enunciado tiene una mayor, menor certeza, o simplemente se considera su falsedad.

En estas disciplinas, se toma en cuenta si una aseveración describe o no en forma alguna al objeto que pretende estudiar o a las propiedades que trata de analizar.

En las ciencias empíricas, la racionalidad del ser humano tiene que contrastarse, no sólo con el objeto que pretende analizar, sino también con las circunstancias que lo determinan y esta contrastación es en última instancia la que indica si una proposición tiene algún grado de certeza; no basta elaborar modelos lógicos rigurosos, es necesario que las propiedades de los conceptos se correspondan con el hecho particular que estudian.

En el caso de la matemática, al no ser una ciencia empírica, se utiliza otro criterio de veracidad, el cual no requiere de cotejo alguno con el mundo físico o la actividad concreta del ser humano (consecuencia de la clase objetos que están en la base de su estudio) y por el contrario, en ella, las proposiciones no son más o menos probables, sino que adquieren la categoría de verdades absolutas para las circunstancias (conceptos y axiomas) en que son generadas.

Es sorprendente que diversas propiedades, descubiertas por los pensadores griegos de la antigüedad, sigan considerándose verdaderas en la actualidad, resistiendo el razonamiento realizado sobre su grado de certeza durante más de veinte siglos, situación que no es compartida por diversas proposiciones relativas al mundo empírico.

Como se ha mencionado anteriormente, la matemática es una ciencia histórica, el conocimiento alcanzado en la actualidad es producto de la reflexión del ser humano a lo largo de su estancia en este planeta y, sin duda, todavía habrá más aportaciones.

Esa experiencia, en la construcción del conocimiento, ha perfeccionado la forma de obtenerlo y tiene como sustento a los objetos de estudio y las proposiciones básicas, que sobre ellos se pueden elaborar y también permite establecer un procedimiento lógico que conduce a no dudar de su veracidad.

Ahora bien, anteriormente se ha dicho que, de los conceptos se desarrollan propiedades correspondientes a los elementos primitivos o a los elementos definidos.

Pues, en forma similar, el método axiomático-deductivo establece que las proposiciones que se obtienen de los objetos de estudio tienen dos posibilidades para ser aceptadas como ciertas: se aceptan como verdaderas por conveniencia o como producto de una demostración lógica.

Las proposiciones que se aceptan sin prueba se denominan "axiomas" y se dice que son los principios elementales de razonamiento y se establecen como una "convención", entre los científicos del área, para construir una serie de verdades que permitan deducir a otras proposiciones.

Los enunciados que no tengan la categoría anterior, se sujetan a un proceso de razonamiento para determinar su veracidad y únicamente si éste que conduce a decir que un enunciado es verdadero, está libre de errores lógicos, entonces se dice que la proposición es verdadera y se acepta como un conocimiento que forma parte de una teoría determinada.

Entre las proposiciones demostrables se encuentran los "teoremas", los "lemas", los "corolarios" y diversas proposiciones que son planteadas como "problemas".

Además, están las definiciones que son un tipo importante de enunciados, mediante ellas se expresa la existencia de nuevos elementos conceptuales, que servirán para desarrollar el conocimiento en el área que se estudia. Estas últimas describen las características del nuevo elemento en relación con los ya existentes y para detallar al nuevo concepto sólo se requiere una descripción, y no es requisito el realizar una demostración para aceptar su existencia.

Por ejemplo, la definición de un número racional se puede escribir de la siguiente manera: "es aquel número que se puede expresar como el cociente de dos enteros, siendo el denominador diferente de cero". Aquí, la definición nos indica la existencia de una clase de números que cumplen con esa propiedad, pero no se deducen de las propiedades de los enteros, sino que, más bien son una extensión de esos números, realizada como una necesidad para resolver una serie de problemas que no se solucionan con el conjunto anterior.

Entonces, podemos decir que los axiomas, también conocidos como postulados, son proposiciones bien determinadas que se aceptan como verdaderas por convención, enuncian las propiedades básicas de los elementos primitivos y sirven como fundamento para el desarrollo de una teoría en matemáticas.

Al afirmar que los axiomas se aceptan como verdades por medio de una convención, no se quiere decir que una proposición no cierta se convierta en verdadera por necesidad, únicamente se quiere expresar que si un enunciado es cierto, hay dos formas de aceptarlo como tal: sin prueba alguna o como producto de una demostración, en el primer caso se habla de un axioma. Lo anterior no significa que la verdad sea "autoevidente". No, el concepto de autoevidencia es subjetivo y en matemáticas se desecha ese criterio ya que una verdad en esta ciencia es de carácter objetivo; independiente de una voluntad particular, existe como verdad para cualquiera que la observe, por esto se dice que: "aunque la autoevidencia no se atribuyera más que a postulados básicos de la matemática... sería pertinente observar que los juicios acerca de lo que puede considerarse autoevidente son subjetivos, pueden variar de una persona a otra y, desde luego no pueden constituir una base adecuada para las decisiones acerca de la validez objetiva de las proposiciones matemáticas" (Hempel, 1974, pág. 8).

Un ejemplo puede aclarar, entre los axiomas de los números reales está el siguiente: "si a y b son números reales entonces $a+b = b+a$".

Esto es cierto porque se establece como axioma, pero no únicamente por ello es cierto, sino que además es posible verificar su cumplimiento: realizando el ejercicio, cambiendo los valores numéricos de las literales tantas veces como queramos, o podamos, y veremos al final que su veracidad es inobjetable. Es decir, la certeza de los axiomas no sólo es producto de la imaginación, sino que al aplicarlos encontramos que es cierto lo que enuncian.

La aceptación de los axiomas como verdades, sin recurrir a prueba alguna, se realiza por medios convencionales y el criterio que se considera es el de necesidad respecto a la generación de la teoría que se trate. Pero, ¿por qué son necesarios?

Sobre las proposiciones matemáticas se puede señalar algo similar a lo que acontece con los elementos primitivos y los derivados.

Al establecer un concepto de la matemática como objeto de razonamiento, se pueden crear diversas proposiciones que describen sus propiedades.

Por ejemplo, considérese a los números reales como objeto a estudiar. Acerca de ellos se han construido las siguientes proposiciones, las cuales suponemos que tienen la categoría de ser verdaderas, ya que no tendría sentido pensar en construir una ciencia suponiendo proposiciones que se sabe son falsas, y sólo un posterior análisis o una deducción nos dirá si se acepta su verdad como axiomas o con base en una prueba.

Las proposiciones nos indican lo siguiente:

"la suma de dos números reales es un número real";

"la multiplicación de dos números reales es una operación conmutativa";

"si se multiplica a cualquier número real por el número cero, el resultado es cero".

En los textos que incluyen el estudio de la estructura de los números reales se clasifica a las dos primeras como integrantes de los axiomas de tal estructura, en tanto que la tercera no es considerada así y debe demostrarse su certidumbre.

Algunas veces, la demostración tiene como base únicamente a los axiomas, en otras ocasiones intervienen algunas proposiciones ya demostradas. Pero, en todos los casos, deben existir proposiciones verdaderas que se incluyan en el razonamiento: se debe tener una serie de verdades para demostrar otras verdades.

Esto significa que, al utilizar el método axiomático-deductivo, algunas propiedades dan origen a otras y al tener un conjunto de proposiciones verdaderas, se pueden deducir otras por medio de un razonamiento deductivo.

El proceso de prueba de la matemática involucra el encadenamiento de enunciados verdaderos, que describen alguna propiedad del concepto bajo estudio; la sucesión produce nuevas proposiciones que necesariamente son verdaderas, por ser el resultado de una sucesión de proposiciones que han adquirido el carácter de verdades por los procedimientos aceptados.

Como se puede inferir fácilmente, la cadena de proposiciones verdaderas conduce a la existencia de varios enunciados que no se deduzcan de otros; algunas proposiciones se deben aceptar sin demostración. Este papel lo cumplen los axiomas o postulados.

Entonces, se puede afirmar que es por la necesidad de tener algunas proposiciones que sirvan de base para realizar el razonamiento, que se considera necesario que un pequeño grupo de verdades no estén sujetas a prueba alguna; basta pensar en su existencia como conveniente, pero además, deben cumplirse que tales proposiciones deben expresar alguna propiedad del concepto en cuestión, lo que no presenta problema alguno, ya que muchas de las propiedades de los entes matemáticos han existido antes de que se estableciera el método axiomático-deductivo como generador de los conocimientos en la matemática, lo que implica un manejo, al menos intuitivo, no sólo del significado del concepto, sino también de la propiedad que se deriva.

La aceptación de una proposición como axioma se realiza de forma convencional, es decir se sujeta a la reflexión y a la no objeción de los científicos del área.

El criterio fundamental, habiéndose determinado que representa a una propiedad del objeto que se analiza, es el de necesidad. Es decir, una proposición cierta directamente no puede considerarse como un axioma, además debe entenderse que sin ella no posible construir la teoría correspondiente.

El conjunto de los axiomas debe contener exclusivamente a los que cumplen una serie de características básicas: deben ser suficientes en número, consistentes entre sí e independientes uno del otro.

Se habla de un número suficiente de axiomas porque en ese conjunto deben estar exclusivamente los que sean necesarios para construir una teoría, dejando fuera a los que resulten superfluos, es decir a aquellos de los que pueda probarse su verdad mediante el encadenamiento de proposiciones integrantes del grupo base y de otras verdades que se vayan obteniendo.

No sólo debe ser un grupo pequeño; además deben estar las proposiciones que no conduzcan a contradicciones, ni entre ellos, ni en la construcción de la teoría. Los axiomas deben formar un grupo de proposiciones consistente.

Por último, las proposiciones básicas deben ser independientes entre sí, ya que si alguna dependiera de la existencia de otra u otras, ello significaría que se puede deducir de ellas, pasando a ser una proposición deducida, cuya verdad no puede ser aceptada sin prueba.

Una vez seleccionado el conjunto de proposiciones básicas para la teoría, todos los demás enunciados se aceptarán como verdades únicamente si son el resultado de una prueba, o como producto de una definición; esto en el caso de recurrir a la inclusión de nuevos conceptos.

6. El razonamiento

Ya hemos dicho que, en matemáticas, la deducción de proposiciones verdaderas tiene como base la creación de los elementos primitivos y una serie de proposiciones fundamentales sobre ellos.

Además de estos conjuntos, la estructura elaborada para la generación del conocimiento en esta ciencia requiere de una forma de razonamiento, que permita la elaboración y la verificación de otras proposiciones que amplíen el saber sobre los elementos existentes y los que se vayan elaborando con base en los anteriores.

Pero, una cuestión importante es que el razonamiento debe conducir a que la certeza de las proposiciones no admita refutación. Para lograr lo anterior, los científicos de esta área han utilizado procedimientos racionales que han arrojado buenos resultados.

Entre las formas de razonamiento que utiliza el ser humano, el pensamiento del matemático ha optado por utilizar, en forma básica, a la deducción, considerando tres variantes de ella para lograr la mayor parte de las demostraciones de los enunciados sujetos a prueba. Éstas variantes son:

a) Demostración directa.
b) Demostración indirecta o por reducción al absurdo.
c) Demostración por inducción matemática.

Con la inclusión del método deductivo de razonamiento, el sistema axiomático-deductivo queda entonces integrado por: los elementos primitivos, el conjunto de axiomas y el proceso deductivo de razonamiento, estos tres factores permiten que se pueda generar una teoría en matemáticas.

Para explicar el proceso de demostración en la matemática y como un intento de concretar lo expuesto hasta aquí, utilizaremos, a manera de ejemplo, el sistema axiomático utilizado por Norman B. Haaser y coautores para desarrollar su teoría acerca del análisis matemático.

Los autores consideran que el sistema axiomático de los números reales es una condición necesaria para la construcción del análisis matemático e indican que basta la intuición de lo que son los elementos primitivos y los axiomas para fundamentar la teoría que se construye sobre tales elementos:

"El método axiomático de introducción de los números reales, nos proporciona una base breve y adecuada para nuestros estudios de análisis. Que los números reales tal como los hemos conocido en nuestras experiencias previas satisfacen los axiomas, se hará aparente a medida que prosigamos nuestro estudio" (Hasser, 1974, pág. 25).

Como se observa, los autores no creen necesario definir a los números reales, sólo consideran importante el tener "experiencias previas" con ellos para comprender lo que son y darle así un significado a los axiomas.

El sistema axiomático que proponen para los números reales está compuesto por:

a) El conjunto de los números reales.
b) Dos operaciones: adición y multiplicación.
c) Una relación de orden, denotada por "<" y entendida como "menor que".
d) Un conjunto de axiomas.

En el texto referido sólo se explica cuáles son los subconjuntos de los números reales, y se supone que la idea, formada en la educación previa, acerca de lo que son las operaciones de adición y multiplicación, basta para trabajar en el sistema axiomático planteado.

También se supone que la relación "menor que" no causa problemas conceptuales.

Por último se enuncian los axiomas que cumplen los números reales aplicando las operaciones de adición y multiplicación.

En los axiomas se considera que "a", "b" y "c" son elementos pertenecientes al conjunto de los números reales, el cual se denomina por "R".

Los axiomas enunciados para la operación de adición o suma, representada por el signo "+", son:

	AXIOMA	NOMBRE	SIGNIFICADO
A.1	$(a + b)$ E R	Cerradura	Si se suman dos números reales, el resultado es un número real.
A.2	$a + b = b + a$	Conmutativa	La suma de dos números reales produce el mismo resultado, sin importar el orden en que se realiza.

	AXIOMA	NOMBRE	SIGNIFICADO
A.3	$(a + b) + c =$ $a + (b + c)$	Asociativa	La suma de dos números reales es una operación binaria. Se puede realizar la suma de más de dos sumandos, pero, para esto, se deberán considerar sólo dos de ellos en cada operación, no importando como se les escoja; el resultado no se altera.
A.4	$a + 0 = 0 + a = a$	Elemento Neutro	Entre los números reales, existe un elemento, denominado "cero" tal que al sumarse con otro número real, no altera a este último.
A.5	$a + (-a) =$ $-a + a = 0$	Elemento Inverso	Para todo número real existe un único número real: "$-a$", denominado "elemento inverso de la suma", tal que al sumarse entre ellos, dan como resultado al elemento neutro de la adición.

Los axiomas de la multiplicación, denotada por el signo "x" son:

	AXIOMA	NOMBRE	SIGNIFICADO
M.1	$(a \times b)\, E\, R$	Cerradura	El resultado de multiplicar dos números reales es un número real.

	AXIOMA	NOMBRE	SIGNIFICADO
M.2	$a \times b = b \times a$	Conmutativa	El orden en que se realiza la multiplicación de dos números reales no altera el resultado.
M.3	$(a \times b) \times c =$ $a \times (b \times c)$	Asociativa	La multiplicación es una operación binaria, se pueden multiplicar más de dos factores, pero deben considerarse sólo dos a la vez, se pueden escoger en cualquier orden, sin que se altere el resultado.
M.4	$a \times 1 = 1 \times a = a$	Elemento Neutro	Entre los números reales existe uno, denominado "unidad", que al multiplicarlos por otro, no lo altera.
M.5	$a \times (1/a) =$ $(1/a) \times a = 1$	Elemento Inverso	Para cada número real "a", distinto de cero, existe un número: "$(1/a)$", denominado "inverso multiplicativo", tal que, al multiplicarse entre ellos, dan como resultado al elemento neutro de la multiplicación.

Además de los axiomas enunciados para cada operación, existe otro que relaciona a ambas, que se nombra "axioma distributivo" y expresa lo siguiente:

El resultado de multiplicar un número por una suma es equivalente a multiplicar al factor común por cada uno de los sumandos y después sumar los productos realizados:

D) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Para la relación "menor que" se cumple lo siguiente:

O.1. Axioma de la tricotomía: para dos números reales, "a" y "b", se verifica únicamente una de las tres relaciones siguientes:

1) "$a < b$" "a es menor que b";

2) "$a >$ b" "a es mayor que b" o

3) "$a = b$" "a es igual a b".

O.2. Axioma de la transitividad: "Si un número real es menor que otro y éste a su vez es menor que un tercero, entonces el primero es menor que el tercero:

Si "$a < b$" y "$b < c$" entonces "$a < c$".

O.3. Axioma aditivo: "Si a ambos miembros de una desigualdad se les suma el mismo número real, la desigualdad no cambia de sentido":

Si "$a < b$" entonces "$a + c < b + c$".

O.4. Axioma multiplicativo: Si a ambos miembros de una desigualdad se les multiplica por el mismo número real positivo, la desigualdad no cambia de sentido:

Si "$a < b$" y "$c > 0$" entonces "a x $c < b$ x c".

En el texto de referencia se enuncia un axioma adicional, el del supremo, que no consideramos para los fines del presente trabajo.

7. Los tipos fundamentales del razonamiento

Como bien se puede observar, los axiomas sólo son un número pequeño de proposiciones que cumplen los números reales.

Toda teoría en matemáticas implica proposiciones adicionales, que al no estar incluidas en el conjunto de axiomas, deben sujetarse a la prueba de veracidad que esta ciencia exige.

Para ejemplificar el proceso deductivo que está explícito en la prueba, para aceptar la veracidad de las proposiciones, se consideran las modalidades de razonamiento anotadas en páginas anteriores.

La variante utilizada depende del tipo de proposición que se trate, lo que no significa que haya reglas determinadas para realizar la demostración, salvo el rigor lógico en el encadenamiento de las proposiciones.

Por el contrario de que las demostraciones sean automáticas, para realizar una deducción, además de tener un determinado acervo de conocimientos relativos al tema que se aborda, en ocasiones se requiere de utilizar la intuición y un desarrollo grande de la imaginación para poder anticipar el posible curso y el resultado de la prueba.

Supongamos el siguiente enunciado, expresado anteriormente: "todo número real, al multiplicarse por el elemento neutro de la suma da como resultado a este último" o en otras palabras: "si a es un número real entonces $a \times 0 = 0$".

Esta propiedad es muy conocida por el común de la gente y parece de tal obviedad, que a muchos se les ocurriría que no existe mayor dificultad para aceptar su certidumbre sin alguna prueba. Pero, como ya se mencionó, tal proposición no forma parte de los axiomas establecidos (ver páginas 28-31), y entonces debe probarse su validez por un proceso deductivo, situación que se abordará más adelante.

Pero antes es conveniente que se establezcan otros elementos.

Recordando un poco lo que ya se dijo, la estructura de las proposiciones en matemáticas es de la forma "si p entonces q". Donde "p" es la parte de la proposición compuesta que expresa lo que se supone cumple el concepto involucrado en la prueba y "q" es la propiedad que se quiere probar.

A la primera proposición, "p", se le denomina "hipótesis" y a la segunda, "q", "tesis".

Otro problema lo representa el aspecto de la generalidad, el cual consiste en que, cuando decimos que "si a es un número real, entonces $a \times 0 = 0$", lo que queremos afirma es que la propiedad se cumple para cualquiera que sea el valor que tome "a". La forma en que se presenta y conserva el enunciado durante la prueba nos da la clave para que observemos que se trata de cualquier caso, es decir que se resuelve el problema de la generalidad.

Si el enunciado dijera lo siguiente: "si 3 es un número real, entonces $3 \times 0 = 0$" estaríamos abordando un problema particular y de seguro que llegaríamos a probar que la proposición es cierta, así como también lo sería para cualquiera que fuera el número real que colocáramos en el lugar de "a".

Entonces nos daríamos cuenta de que es conveniente iniciar con "a" y saber que es cualquiera de todos los posibles valores.

En consecuencia, la hipótesis o supuesto del enunciado anotado es: "a es un número real" y con ello, implícitamente se acepta que, en tanto hablemos del número real "a", éste es cualquiera de ellos, además y en relación a las operaciones de adición o multiplicación, se cumplirán los axiomas establecidos para el total de elementos de ese conjunto de números y para dichas operaciones.

Dicho lo anterior podemos ejemplificar el uso de la demostración en forma directa.

a) Demostración directa y desarrollo

Se usará el procedimiento de la demostración directa para probar que la proposición anterior es verdadera.

Esta modalidad del proceso deductivo parte de los supuestos y axiomas para ir articulando proposiciones, una deducida de otra y todas ciertas, hasta obtener, al final de la cadena, la proposición que forma la tesis y cómo ésta es consecuencia de eslabonar proposiciones verdaderas, aplicando la propiedad transitiva de la igualdad, entonces la última proposición es producto de la cadena y por lo tanto es un enunciado verdadero.

En la presente demostración, se utiliza la columna izquierda para escribir la articulación de las proposiciones que se usan en la deducción y en la columna de la derecha la justificación de su uso.

Los axiomas, están representados por la notación utilizada en las páginas 28 a 30 las comillas de la columna de la izquierda significan que en su lugar estaría una expresión igual a la situada en el renglón inmediato superior y del mismo lado del signo igual.

Desarrollo de la demostración

Sea la proposición " si a es un número real, entonces al multiplicarlo por el número cero, el resultado es nulo".

Hipótesis: "a es un número real";
Tesis: "$a \times 0 = 0$".

PROPOSICIÓN	JUSTIFICACIÓN
1. $a \times 0 = a \times 0 + 0$	Sumar el neutro aditivo deja inalterado al primer sumando como resultado de la suma *(A.4)*.
2. " $= a \times 0 + [a + (-a)]$	El neutro aditivo es igual a la suma de un número con su inverso aditivo *(A.5)*.
3. " $= [a \times 0 + a] + (-a)$	Se aplica el axioma asociativo para la suma *(A.3)*.
4. " $= [a \times 0 + a \times 1] + (-a)$	El número "a" se multiplica por la unidad sin que el resultado se altere *(M.4')*.
5. " $= a \times (0 + 1) + (-a)$	Se aplica la propiedad distributiva, el número "a" multiplica a la suma $0 + 1$ *(D)*.
6. " $= a \times 1 + (-a)$	Se realiza la suma $0 + 1$ *(A.4)*.
7. " $= a + (-a)$	Se multiplica al número "a" por la unidad *(M.4)*.
8. $a \times 0 = 0$	La suma de un número real con su inverso aditivo da como resultado al cero *(A.5)*

De la cadena de razonamientos se deduce lo siguiente: teniendo como base la expresión "$a \times 0$" se fueron eslabonando las proposiciones hasta concluir con la conclusión: "$a \times 0 = 0$" y ésta se obtuvo como consecuencia del encadenamiento de proposiciones verdaderas, cada una deducida de la anterior, para el sistema axiomático considerado.

Entonces, como resultado de la deducción, se concluye que la tesis es cierta.

Por lo tanto, ahora se puede agregar esa verdad al conjunto de proposiciones ciertas de la teoría, para tenerla como base y lograr con ella la prueba de otras propiedades de los números reales.

b) Demostración indirecta o por reducción al absurdo

Este tipo de demostración es muy peculiar, en él se utiliza el procedimiento de negar lo que se quiere demostrar, es decir se niega que la tesis sea verdadera. Esta negación se toma como base del razonamiento y se continúa la deducción, por medio de un proceso deductivo directo, eslabonando proposiciones ciertas y se espera obtener una contradicción como resultado final.

Esto es, se parte de una proposición, que se supone cierta, y por medio de un encadenamiento de verdades se llega a un enunciado que contradice a una verdad ya establecida en la teoría, lo cual indica que el proceso lógico usado tiene un problema.

Pero, el problema no puede estar en la última proposición, de la que ya se sabe su certeza, tampoco puede estar en las proposiciones que se encadenaron, que son también verdades ya aceptadas.

En consecuencia, el problema se ubica en la proposición utilizada como base del razonamiento, de la cual no se sabe aún su valor de verdad, sólo se conoce que es la negación de lo que se quiere demostrar (tesis).

Como el tener esta negación en la base del razonamiento conduce a negar otra proposición ya aceptada como cierta, usando proposiciones también aceptadas, entonces esa negación es falsa y por lo tanto la proposición inicial es verdadera.

Esto se debe a que en matemáticas exclusivamente existen dos valores de verdad para una proposición (falsa o verdadera). Como la negación de la tesis conduce a contradicciones y se entiende que si fuera verdadera debería conducir a obtener una verdad, como se vio en la variante de la demostración directa, entonces la negación es falsa y la tesis es verdadera.

Para ilustrar la prueba por contradicción se utilizará la difundida proposición, debida a Euclides, de que: "Ningún número racional tiene un cuadrado igual al número dos" o también conocida como la prueba de existencia de números distintos a los racionales.

Aquí es conveniente enunciar que, aunque Euclides elabora la prueba de la existencia de los números irracionales, estos números eran ya conocidos anteriormente. Entre los pitagóricos se obtiene el número raíz cuadrada de dos mediante la medición de la longitud de la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden ambos la unidad.

La proposición se puede enunciar de la siguiente manera: "si a y b son dos números enteros, primos entre sí, donde b es distinto de cero, entonces $(a / b) \neq \sqrt{2}$ ".

Hipótesis: (a/b) es un número racional no reductible.
Tesis: $\sqrt{2}$ no se puede expresar como un número racional.

Para iniciar el razonamiento se niega la tesis, resultando el siguiente enunciado: " es verdad que existe un número racional cuyo cuadrado es el número dos" o "$(a / b) = \sqrt{2}$".

Con base en esta afirmación se aplica el razonamiento directo siguiente:

PROPOSICIÓN	JUSTIFICACIÓN
1) $(a / b)^2 = 2$	Se elevan al cuadrado ambos miembros de la proposición base.
2) $[(a^2) / (b^{2)}] = 2$	Se aplica la potencia a cada elemento de la fracción.
3) $(a^2) = 2 \text{ x } (b^2)$	Se multiplican ambos miembros por el denominador de la fracción.
4) a = número par = 2 x m	La raíz cuadrada de un número par es también un número par.

5) $a^2 = 4 \times (m^2)$	Se eleva al cuadrado la igualdad número 4.
6) $4 \times m^2 = 2 \times b^2$	Propiedad transitiva de la igualdad: dos número iguales a un tercero son iguales entre sí.
7) $2 \times m^2 = b^2$	Se multiplican ambos miembros de la igualdad 6 por el inverso multiplicativo de 2.
8) b = número par	Por misma razón que la igualdad número 4.

Al observar las igualdades 4 y 8 se deduce que existe una contradicción, puesto que ambos números: a y b, resultaron pares y se había supuesto que eran primos entre sí, siendo en consecuencia reductible la fracción "a / b". Por lo tanto, se desecha la negación de la tesis y se acepta que la propiedad "$(a / b) \neq \sqrt{2}$ es verdadera.

c) Demostración por inducción matemática

Entre las propiedades de los conceptos de la matemática existen algunas que se cumplen para conjuntos con un número infinito de elementos. Tal es el caso de los números naturales, son muchos los casos en que una propiedad debe cumplirse para la totalidad de los elementos del conjunto.

Pero como se puede deducir fácilmente, es imposible demostrar que cada elemento del conjunto cumple con la propiedad común, o sea, de nuevo encontramos el problema de la generalidad. Como alternativa al proceso directo, se emplea un tipo de demostración que evita la prueba individual para los elementos del conjunto, este tipo de prueba es el denominado: inducción matemática.

Como primer aspecto de esta modalidad de la deducción, se considera que el conjunto en cuestión, es un conjunto ordenado. Esto es, se puede colocar a un primer elemento del conjunto y, mediante una regla de sucesión, los demás se arreglan de forma tal que no exista ambigüedad en el lugar que les corresponde a cada uno, además, siempre es posible colocar a un elemento en el lugar correspondiente.

Por ejemplo, en el conjunto de los números naturales se sitúa el primer elemento, el uno, y por medio de la regla de sucesión, digamos: "sumar la unidad al anterior"; cada elemento del conjunto queda ubicado en un determinado lugar, resultando en consecuencia un conjunto ordenado.

En este conjunto el primer elemento es el *uno*, el siguiente es el que resulta de sumar la unidad al anterior: 1+1, o también denominado *dos*, el siguiente será el tres o 2+1, etcétera. En consecuencia, un número natural específico puede colocarse en el lugar que le corresponde, por ejemplo el número 5846, éste es resultado de la suma 5845+1, por lo tanto estará colocado inmediatamente después del 5845 y antes que el 5847 y si bien es cierto que el conjunto es infinito, siempre es posible colocar a un número natural en el lugar correspondiente.

Es así que, no obstante colocar a todos los elementos en el lugar correspondiente, es imposible agotar la comprobación de que cada elemento cumple con una propiedad determinada para el conjunto.

La inducción matemática nos ayuda en la solución del problema. En este tipo de prueba, la intuición juega un papel importante y está presente en la idea que nos indica lo siguiente: lo que es cierto para el conjunto, debe cumplirse para cada uno de sus elementos.

Esta modalidad de la deducción se desarrolla en dos momentos:

Primero, se comprueba que el elemento inicial cumple con la propiedad del conjunto. Hecho lo anterior, y no siendo posible realizar la prueba para cada elemento, la intuición nos permite pensar que si la propiedad la cumplen todos los elementos del conjunto, entonces la cumple el primero y su sucesor, la cumple éste y el siguiente. Situación que continúa sin detenerse, dado que el conjunto es infinito.

Pero, puede decirse que si una proposición es cierta y si se comprueba que el primer elemento cumple con la propiedad, la cumple el elemento que está en el k-ésimo lugar, y la debe cumplir el siguiente de éste, el que ocupa el $(k+1)$-ésimo sitio, donde k es un valor cualquiera de los lugares de la sucesión.

La clave de la prueba por inducción matemática está en utilizar esto último: el k-ésimo y el $(k + 1)$-ésimo, digamos el primero y el segundo o el tercero y el cuarto, etcétera. Ellos son un par cualesquiera de elementos consecutivos, ésa es una situación necesaria para asegurar que un elemento y su sucesor cumplan con la propiedad, sin importar los lugares que en particular ocupen.

Lo anterior se puede resumir de la siguiente manera: si existe una propiedad "p" que cumple un determinado conjunto de números, entonces la cumple el primero y la cumplen los elementos k-ésimo y $k + 1$-ésimo.

Es así que, si lo anterior sucede, entonces no es descabellado aceptar que todos los elementos de la cadena infinita cumplen con la propiedad "p".

Esta situación es resultado de que para una propiedad determinada que se cumple en un conjunto infinito de elementos:

"*1*) La tiene el primero, y como al tenerla uno, la tiene su sucesor, entonces esa propiedad la cumple el segundo eslabón.

2) Como la tiene el segundo, y al tenerla un eslabón, la tiene el que le sucede, entonces el tercer eslabón tiene la propiedad.

3) Intuitivamente, sentimos que se puede continuar por ese camino y que nunca se podrá llegar a un eslabón que no tenga la propiedad, ya que de ser así, ninguno de sus antecesores podrá tenerla y esto no es cierto, ya que el primero seguramente la tiene".

(Fregoso, 1972, pág. 193).

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, el procedimiento de inducción matemática supone que las dos condiciones siguientes se deben cumplir necesariamente:

1) Probar que el primer elemento tiene la propiedad.

2) Suponer que el elemento k-ésimo la cumple y comprobar que también la proposición es cierta para el $k + 1$-ésimo elemento.

Como aplicación de este procedimiento de prueba se demostrará que la proposición:" la suma de los primeros n números naturales es igual a:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Hipótesis: "existe la suma de los primeros n números naturales".
Tesis: la suma mencionada es igual a:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración.

1) Se prueba que la propiedad es cierta para el primer elemento del conjunto, el uno: $1=\frac{1(1+1)}{2}$, esta expresión es indudablemente cierta.

2) Se supone que el elemento k-ésimo también cumple la propiedad, resultado que la expresión siguiente también es cierta para $n = k$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots \mathrm{k} = \frac{k(k+1)}{2}$$

2.1 Se demuestra que la propiedad se cumple para el $k + 1$-ésimo elemento, es decir la proposición debe ser cierta para $n = k+1$, situación que se probará a continuación:

PROPOSICIÓN	JUSTIFICACIÓN
1. $1 + 2 + 3 + \ldots + k = [k(k + 1)]/2$	Supuesto.
2. $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \{[k(k+1)]/2\}+(k+1)$	Se adiciona la misma cantidad a ambos miembros de la igualdad.
3. $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k = 1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$	Se efectúa la suma de fracciones en el segundo miembro.

4. $1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

En el segundo miembro se factoriza $a\ (k+1)$.

La expresión resultante en la igualdad cuatro nos indica que la proposición es cierta para el conjunto de números mencionado. Tal expresión es la que se obtendría si en la igualdad inicial se sustituye el valor de n por $k + 1$, con lo que concluye la prueba.

Habiendo descrito estos ejemplos, podemos ya desarrollar la segunda parte del trabajo que tendrá como finalidad describir una de las formas en que se puede crear una proposición matemática y consecuentemente desarrollar algunas de las propiedades que como tal tenga, demostrando su veracidad matemática por medio de algunos de los procedimientos utilizados en esta primera parte.

II. Ahorro e inflación

(Una aplicación del razonamiento matemático en la solución de un problema de matemáticas financieras)

1. Introducción

No es raro que en la actualidad, los economistas utilicen a la matemática como una herramienta fundamental en la creación de la teoría correspondiente al área de la economía.

Los textos referidos a la explicación de la actividad económica contienen múltiples aplicaciones de la matemática. Pero esto no es consecuencia de un afán exhibicionista de los profesionales de esta área, por el contrario, pareciera que es producto de una necesidad, dado que muchas de las ideas expresadas en tales textos encuentran claridad y en diversos casos sentido, cuando se enuncian o son el producto de un razonamiento matemático.

La potencialidad de esta ciencia, como herramienta de la economía, es producto de su aplicación, no sólo en el papel de medio de expresión adecuado de diversos conceptos de la teoría económica, sino además en su carácter de generadora del saber; como una ciencia deductiva que crea conocimiento en forma independiente de su aplicación.

Estas dos características están indisolublemente presentes, aunque no se hacen explícitas ni se destacan cuando se utiliza a la matemática como una ciencia auxiliar.

El primero de los aspectos, su utilización como un lenguaje, parece no representar mayor problema para explicarlo, debido a que diversas categorías de la ciencia económica implican la cuantificación y la expresión de relaciones propias de la matemática, como lo son las expresiones algebraicas o relaciones de tipo funcional.

La segunda característica, su uso como ciencia deductiva, es una consecuencia directa de haber expresado ideas económicas en formas propias de la matemática, lo cual no se hace explícito y se considera que es un desarrollo ajeno a la edificación de la teoría en esta disciplina científica.

Esto es válido, pero resulta interesante tratar de explicar la relación que se da entre las dos ciencias para comprender el carácter de su simbiosis, permitiéndonos entender con claridad el uso que de la matemática hace el economista.

La deducción de las propiedades también es una situación necesaria, porque no se puede dar una expresión algebraica de una relación económica y no recurrir a los atributos matemáticos, ya encontrados, que se obtienen de tal expresión, para darle una validez que es independiente y no contradictoria con su uso en la economía.

Además, se puede decir que el uso de las propiedades matemáticas no se contrapone a las deducciones de la economía, por el contrario, le sirven para fundamentar diversas conclusiones sobre su campo de estudio. Pero debe entenderse que la expresión matemática y sus derivaciones sólo son una parte de la aplicación, adicionalmente hay que explicar porque las cosas son así.

Esto nos indica que para utilizar adecuadamente a la herramienta que representa, como ciencia auxiliar, debe considerarse la gama de conocimientos existentes en esa área y los procedimientos de prueba usados en ella, para darle un sustento sólido a las proposiciones económicas que pueden expresarse por medio del lenguaje matemático.

El presente trabajo tiene el propósito de utilizar explícitamente ambas características de la matemática (contenido y método), para desarrollar un modelo que tenga una aplicación en el área de las matemáticas financieras.

2. Los supuestos del modelo

El primer objetivo es obtener una expresión algebraica, que describa las diversas posibilidades que pueden ocurrir, respecto a un monto de dinero ahorrado, incluyendo un nivel de gasto, y como segunda cuestión mostrar la forma en que la herramienta puede fundamentar las proposiciones surgidas en el área de la ciencia que la utiliza.

En este apartado se describen los supuestos básicos del modelo para desarrollarlo posteriormente, utilizando la herramienta matemática como medio de expresión y los procedimientos de prueba que se abordaron en la primer parte de este documento.

Para iniciar el desarrollo del trabajo, supongamos que el señor Jr. es un potencial rentista, debido a que logra reunir, con mucho esfuerzo y a lo largo de su vida productiva, una cierta cantidad de dinero y piensa dejar de trabajar, ya que considera que puede vivir de la inversión de su dinero y de los intereses que le produzca.

Para lograr tal propósito, deposita su ahorro en una institución financiera, por ejemplo, un banco, quien le brindará un rendimiento, resultado de aplicar una tasa de interés al capital inicial en cada período que se fije de antemano, y produciéndole al inversionista un monto de recursos, con los que puede solventar sus gastos en cada uno de los lapsos.

Como el señor Jr. piensa vivir durante un tiempo prolongado, elige realizar un gasto que le permita una vida desahogada, por ejemplo: tres o cuatro salarios mínimos, o tal vez más, pero como se trata de una persona racional, considera que el gasto inicial, que fije para cada unidad de tiempo, debe ser inferior al monto de recursos ahorrado y en un primer momento no considera el caso en que debe consumir más de lo que recibe como intereses, tiene la idea que de esta forma le durará más su dinero.

Como el consumo lo realiza en el transcurso del período determinado, se debe tomar en cuenta la posibilidad de que la canasta de bienes elegida incremente su precio como producto de un proceso inflacionario en cada unidad de tiempo. En este punto y para los fines del análisis, se puede establecer que el señor Jr. calcula su propio índice de la inflación (claro que no lo hace porque desconfíe del que las autoridades publican) el cual posiblemente coincida con el calculado por la institución central encargada de ello, que también le puede servir para el propósito, pero considerará para sus cálculos el índice que le compete de acuerdo a su consumo.

Por otro lado, nuestro potencial rentista aprovecha las ventajas del crédito, sin cargos adicionales por parte de sus proveedores o de la institución bancaria, para liquidar sus pagos al final del período, que es cuando cuenta con los recursos para finiquitar sus deudas.

Se puede suponer adicionalmente que los montos de ahorro y de gasto inicial, las tasas de interés y de inflación no se modifican durante el total de períodos que se proyectan pero, como tales cantidades se podrían alterar en otro momento, entonces estas últimas servirían para realizar un ejercicio diferente.

3. Desarrollo del modelo

El primer paso consiste en expresar algebraicamente las condiciones del modelo y después proseguir con los aspectos adicionales que la matemática nos ofrece para obtener expresiones derivadas de esta situación, que describan aspectos alternativos en el área de la economía, pero al realizar lo anterior se tendrá como base la solidez que brinda el utilizar los procesos de prueba de las proposiciones que involucran a la matemática.

Para iniciar tal proceso, se establecen los conceptos económicos: Ahorro, gasto, tasa de interés, tasa de inflación y período de tiempo, en su sentido de magnitudes, para darles el carácter de entidades propias de la matemática.

Los primeros cuatro elementos se pueden representar sin problema por números reales positivos y se considera que al tiempo, aunque sea una magnitud continua, podemos representarlo en un primer momento por un número natural, debido a que se piensa en un ejercicio para determinados valores, digamos mensuales, pero pueden ser anuales o de otra duración. Entonces, las cantidades se pueden definir de la siguiente forma:

a) El ahorro inicial se representa con la letra K;
b) El nivel de gasto se enuncia por la literal G;
c) La tasa de interés se expresa por medio de r;
d) La tasa de inflación estará representada por p;
e) La letra t denota el período en cuestión.

Habiéndose realizado la definición, podemos considerar que las literales K, G, r, p, t, representan intrínsecamente dos aspectos: entidades económicas y números reales,

Entendiéndose así que las conclusiones que se obtengan del análisis y las propiedades que se utilicen deben referirse a ambas características.

En la parte matemática, en la que se entiende que las literales son números reales, se asume que cumplen con todas las propiedades desarrolladas en esa ciencia para tales números y ellas pueden utilizarse para generar nuevas proposiciones matemáticas, pero ahora tendrán una aplicación en el campo de la economía.

Para continuar el desarrollo del modelo, se considera lo siguiente: como resultado de que el señor Jr. ha decidido invertir su dinero en una institución bancaria, recibe un monto de intereses, que podrá utilizar, junto con su ahorro inicial, para pagar al final de cada período los gastos efectuados en su transcurso y por lo tanto afectados por el nivel inflacionario.

Así, al final del primer lapso, nuestro rentista tiene la siguiente cantidad de dinero para reinvertir:

$$A_{1}= K(1+r) - G(1+p) \ldots (1)$$

El miembro de la izquierda de esta expresión algebraica, (A_1), representa al ahorro que se tendrá al finalizar el primer plazo.

El primer término del segundo miembro nos indica que el señor Jr. podrá disponer del monto de recursos $K(1+r)$, producto del ahorro inicial, K, y de la cantidad de intereses pagados por el banco, rK.

El segundo término expresa que, como consecuencia de que el gasto inicial G, se vio afectado por el índice inflacionario del período p, el ahorrador habrá gastado un monto equivalente a $G(1+p)$, cantidad que deducirá de sus recursos disponibles, dando como resultado un monto de ahorro disponible para reinvertirlo en un nuevo lapso, de dicha operación resulta la igualdad (1).

Al reinvertir la cantidad A_1, se obtiene al final del segundo período el monto de recursos $A_1(1 + r)$, de los cuales se descontará el gasto de igual lapso: $G(1 + p)(1 + p) = G(1 + p)^2$, con lo que se puede invertir ahora una cantidad que se obtiene de la siguiente manera:

$$A_2 = A_1(1+r) - G(1+p)^2 = [K(1+r) - G(1+p)](1+ r) - G(1+p)^2$$

ó

$$A_2 = K(1+r)^2 - G(1+p)(1+r) - G(1+p)^2 \ldots (2)$$

La expresión (2) es producto de una deducción aplicada sobre expresiones algebraicas, pero ella se ha obtenido al analizar un proceso de carácter económico, porque si bien la expresión puede entenderse en forma abstracta, como una entidad matemática, se ha originado del hecho de tratar de describir un comportamiento en el área de la economía. Por ello las expresiones tienen un significado implícito para estas ciencias.

El primer miembro de esta expresión describe el monto de ahorro disponible el final del período $t = 2$.

Del segundo miembro, el primer término, $K(1 + r)^2$ representa el ahorro acumulado hasta esa unidad de tiempo, sin el efecto del gasto.

El tercero, $G(1 + p)^2$, nos indica el monto de gasto que debe efectuarse en ese lapso.

El segundo término expresa la idea de que el gasto realizado en el primer período hubiera generado el interés correspondiente, en caso de que se hubiese invertido, lo que daría un monto tòtal por $G(1 + p)(1 + r)$ para esta unidad de tiempo. Pero, al haberse gastado esa cantidad, se debe descontar, adicionado con el consumo del segundo período, del ahorro que resultaría si no hubiera gasto alguno.

Para el tercer plazo se obtiene la expresión:

$$A_3 = A_2(1+r) - G(1+p)^3 = [K(1+r)^2 - G(1+p)(1+r) - G(1+p)^2](1+r) - G(1+p)^3$$

ó

$$A_3 = K(1+r)^3 - G(1+p)(1+r)^2 - G(1+p)^2(1+r) - G(1+p)^3 \ldots (3)$$

La explicación del significado de los términos que componen a la igualdad (3) es análoga a la utilizada para la expresión (2).

Como es fácil observar, se puede utilizar el mismo razonamiento para encontrar las expresiones correspondientes a los períodos posteriores, *4, 5, 6*, o para un período t cualquiera.

Pero no tardaríamos en comprender que el proceso, no sólo es complejo y fastidioso, sino que además, conforme t vaya aumentando, la fórmula se torna inmanejable para el cálculo.

Afortunadamente no es necesario realizar el ejercicio con tal expresión, puesto que la repetición del proceso nos hace sospechar la existencia de un procedimiento para encontrar una fórmula general, que sirva para cuantificar el monto del ahorro disponible al final de cualquier unidad de tiempo t.

Tal fórmula general debe deducirse de las regularidades que se observan en las expresiones ya desarrolladas, sobre todo de la igualdad (3).

Si se observa el segundo miembro de esta igualdad, se pueden deducir las siguientes uniformidades:

1) El primer término representa al monto ahorrado y los intereses correspondientes que se obtendrían si no se hubieran utilizado para pagar los gastos respectivos hasta el tiempo $t = 3$.

2) El último sumando representa el gasto en que se incurre en el período considerado.

3) Los términos intermedios expresan los montos que se obtendrían en caso de haberse ahorrado el dinero dedicado a cubrir los gastos de los respectivos lapsos. En esta expresión, el segundo término indica que el gasto de la primer unidad de tiempo, hubiera producido un equivalente a los intereses de dos períodos por esa cantidad: $G(1+p)(1+r)^2$; el tercero nos dice que el gasto del segundo período habría rendido el equivalente a los intereses de una unidad de tiempo para ese monto: $G(1+p)^2(1+r)$.

4) Los términos que involucran al gasto, del segundo al último, se restan del primero.

5) El número de términos es igual al de períodos más la unidad, en este caso 3+1.

6) El grado de cada término es el número del período que se analiza y además, si se considera al total de términos, el exponente de $1+r$ desciende desde 3 en el primero hasta cero en el último. En sentido inverso se comporta el exponente de $1 + p$, el cual asciende desde cero en el primer término hasta tres en el último.

Al analizar las expresiones para los dos primeros períodos, observamos que estas regularidades se cumplen.

Ahora bien, si además ellas se cumplieran para lapsos posteriores, se tendría que, para $t = 4$, la expresión siguiente sería cierta:

$$A_4 = K(1+r)^4 - G(1+p)(1+r)^3 - G(1+p)^2(1+r)^2 - G(1+p)^3(1+r) - G(1+p)^4 ...(4)$$

Utilizando la notación de sumatoria, esta fórmula es equivalente a:

$$A_4 = K(1+r)^4 - G\sum_{m=1}^{4} (1+p)^m(1+r)^{4-m} ... (4')$$

Estas expresiones se obtuvieron en forma directa, sin desarrollar paso a paso el procedimiento que originó a las primeras igualdades. Pero, si se aplica el proceso de razonamiento utilizado para encontrar las igualdades de los primeros tres períodos, puede comprobarse que son ciertas

En este cuarto caso se desarrollaría la igualdad:

$$A_4 = A_3(1+r) - G(1+p)^4$$

Si el razonamiento utilizado, para encontrar la expresión (4) es correcto, entonces la fórmula general buscada, para un número t cualquiera es:

$$A_t = A_{t-1}(1+r) - G(1+p)^t$$

ó

$$A_t = K(1+r)^t - G\sum_{m=1}^{t} (1+p)^m(1+r)^{4-m} ... (5)$$

Para que esta igualdad sea la expresión que representa a los casos analizados, debe cumplir las seis regularidades establecidas anteriormente, lo que, como se puede comprobar, es cierto y además nos permite decir que con tal fórmula es posible encontrar el monto del ahorro disponible al final del período $t = 1,2,3,4$. Pero, el que se cumpla para estos cuatro períodos, no basta para concluir que sea utilizable para cualquier número natural t.

El procedimiento que nos permite asegurar que eso es posible, es por medio de la utilización de un procedimiento de prueba que demuestra que tal expresión es verdadera para todos los elementos que le conciernen, esto es, para $t = 1,2,3,4,...$

Porque una cosa es encontrar la expresión que sirva para expresar un número limitado de casos y otra distinta es saber que es cierta para todos los que le corresponden.

Obviamente, debe recordarse que el problema es doble, debido a que existen dos posibilidades: probar que la fórmula es cierta desde el punto de vista de la matemática, por medio de sus procedimientos de prueba, y además saber que es utilizable para los propósitos de aplicación que fue creada.

En un principio se hará la demostración de que es cierta desde la visión de la matemática, para después abordar el aspecto de su aplicación en la economía.

4. Demostración, por inducción matemática, de la validez de la fórmula

Como consecuencia de que la prueba involucra a una expresión que debe ser válida para un número infinito de casos, dado que t es un número natural y cómo se verá después, el ahorro puede no acabarse, y ante la imposibilidad de realizar la verificación para cada uno de ellos, se debe utilizar el procedimiento de prueba denominado de inducción matemática, descrito en la primer parte de este trabajo.

Para realizar la prueba se utilizaran los pasos siguientes:

El primero estriba en demostrar que la expresión enunciada se cumpla para el primero de los casos, $t = 1$.

Hecho lo anterior, en el segundo paso, se supone que un elemento cualquiera, digamos el caso $t = j$, cumple también la proposición y con base en esto, se debe demostrar que es válida para el siguiente período $t = j+1$, donde "j" es un elemento del conjunto de los números naturales.

La demostración matemática se realiza de la siguiente manera:

Enunciado: si K, G, r, p, son números reales y si

$$A_t = A_{t-1}(1+r) - G(1+p)^t = K(1+r)^t - G \sum_{m=1}^{t} (1+p)^m (1+r)^{t-m} \quad \ldots (6)$$

entonces A_t es cierta para cualquier $t = 1,2,3,\ldots$

Hipótesis:

a) K, G, r, p, son números reales, t es un número natural.

Al suponer que las literales son números reales, implícitamente se supone que cumplen las propiedades que la matemática ha desarrollado para tales conjuntos de números.

Tesis:

La expresión (6) es cierta para cualquier $t = 1,2,3,\ldots$

Prueba

Paso 1.

Se demuestra que la expresión es cierta para $t = 1$, en este caso, la sumatoria únicamente tiene un sumando:

$G(1+p)(1+r)^0 = G(1+p)$

En consecuencia es cierto que:

$A_1 = A_0(1+r) - G(1+p) = K(1+r) - G(1+p)$

Cumpliéndose la primer condición, debido a que el ahorro inicial, K, es equivalente al disponible al final del tiempo cero, A_0.

Paso 2.

i) Se supone que la expresión es cierta para el período $t = j$, resultando de este supuesto la igualdad:

$$A_j = A_{j-1}(1+r) - G(1+p)^j = K(1+r)^j - G \sum_{m=1}^{j} (1+p)^m (1+r)^{j-m} \quad \ldots (7)$$

ii) Con base en el supuesto de que la igualdad (7) es verdadera, se debe demostrar que también se cumple para el siguiente período: $t = j+1$, es decir por medio de un razonamiento deductivo se debe obtener la siguiente expresión:

$$A_{j+1} = A_j(1+r) - G(1+p)^{j+1} = K(1+r)^{j+1} - G \sum_{m=1}^{j+1} (1+p)(1+r)^{j+1-m} \ldots (8)$$

Igualdad que resultaría al sustituir el índice t por $j+1$ en la expresión (6).

Demostración del paso 2ii.

Como consecuencia de que la primera igualdad de la expresión (8), ya se encuentra en la forma deseada, sólo se trabajará con la segunda igualdad, iniciando el razonamiento con el primer miembro para obtener el segundo, la expresión inicial es;

$$A_j(1+r) - G(1+p)^{j+1} = K(1+r)^{j+1} - G \sum_{m=1}^{j+1} (1+p)^m(1+r)^{j+1-m}$$

En consecuencia, la siguiente expresión resulta al desarrollar el primer miembro de la segunda igualdad de la expresión (8):

$$A_j(1+r)-G(1+p)^{j+1}=[K(1+r)^j - G \sum_{m=1}^{j} (1+p)^m(1+r)^{j-m}](1+r)-G(1+p)^{j+1} \ldots(9)$$

Continuando con el desarrollo algebraico, al realizar la multiplicación por $1 + r$ y considerando que cada término de la sumatoria es afectado por tal factor, resulta la expresión:

$$A_j(1+r)-G(1+p)^{j+1}=K(1+r)^{j+1} - G \sum_{m=1}^{j} (1+p)^m(1+r)^{j+1-m} -G(1+p)^{j+1} \ldots (10)$$

Ahora bien para que esta expresión sea la igualdad (8) que deseamos obtener, sólo hace falta que la sumatoria incluya un sumando adicional. Para incorporarlo, debe observarse que la siguiente expresión es cierta cuando $m = j+1$:

$$G(1+p)^{j+1} = G(1+p)^{m}(1+r)^{j+1-m}$$

Obteniéndose con ello el sumando adicional que se requiere y entonces resulta la equivalencia siguiente:

$$A_{j+1} = A_j(1+r)-G(1+p)^{j+1}=K(1+r)^{j+1} - G\sum_{m=1}^{j+1} (1+p)^{m}(1+r)^{j+1-m} \quad \dots (11)$$

que es la igualdad que buscábamos, resultando que la fórmula es cierta para cualquier valor $t = 1,2,3,\dots$

5. Modelo alternativo

Como ya se ha visto en el inciso anterior, la expresión:

$$A_t = K(1+r)^t - G\sum_{m=1}^{t} (1+p)^{m}(1+r)^{t-m}$$

es válida para cualquier número natural y además nos permite obtener el monto de ahorro disponible que tendría un rentista al finalizar un lapso cualquiera, después de haber realizado un gasto determinado. Sin embargo se puede observar fácilmente que es poco manejable para calcular valores grandes de t.

Afortunadamente es posible encontrar un razonamiento, véase al anexo 1, para obtener una expresión algebraica equivalente, más fácil de trabajar y que permite realizar sin grandes problemas los cálculos para valores grandes de t. Tal expresión es:

$$A_t = K(1+r)^t - G\,(1+p)^t \left[\frac{1-(\frac{1+r}{1+p})\ t}{1-(\frac{1+r}{1+p})} \right] ; p = r \ldots (12)$$

6. Las preguntas del señor Jr. y las fórmulas adicionales

Conociendo que es posible calcular el ahorro disponible al final de cualquier unidad de tiempo "t", a nuestro rentista le han surgido una serie de interrogantes acerca de la posibilidad de vivir durante un largo período con los recursos invertidos y los intereses generados por la inversión, realizando un gasto determinado que es afectado por un índice inflacionario.

Como el señor Jr. quiere conocer la respuesta a cada una de sus dudas, se irán exponiendo de acuerdo al orden que él considere prudente y como en estos momentos no le interesa el fundamento matemático, éste se puede desarrollar en los anexos del presente trabajo.

6.1. El ahorro disponible en un tiempo determinado

Esta es precisamente la cuestión que dio origen al desarrollo de la fórmula y para aprovechar el camino recorrido, nuestro inversionista desea saber el resultado de utilizarla con datos proporcionados por él.

En este ejemplo el valor de t corresponde a períodos cuya duración es de un mes.

Para realizar la ejemplificación, se deben considerar los siguientes datos:

a) Ahorro inicial, K = \$ 20 000,000.
b) Gasto planeado, G = \$ 500 000.
c) Tasa de interés, mensualizada, r = 0.03833 (46% anual)
d) Tasa de inflación del mes, p = 0.01800 (21.6% anual)

Debe recordarse el supuesto de que los datos no varían a lo largo del número de períodos considerado para el cálculo, pero si cambiasen, entonces podría calcularse otro ejercicio.

Aplicando estos datos a las fórmulas (6) y (12), se obtienen los siguientes resultados:

$$A_1 = \$\ 20\,000\,000\ (1.03833) - \$\ 500{,}000\ (1.018) = \$\ 20\,257\,600$$

al finalizar el primer mes.

$$A_{12} = \$20\,000\,000\ (1.03833)^{12} - \$500\,000\ (1.018)^{12} \left[\frac{1-\left(\frac{1.03833}{1.018}\right)^{12}}{1-\left(\frac{1.03833}{1.018}\right)} \right] = \$23\ 103\ 512$$

al concluir el doceavo período, y

$$A_{13} = \$20\,000\,000\ (1.03833)^{13} - \$500\,000\ (1.018)^{13} \left[\frac{1-\left(\frac{1.03833}{1.018}\right)^{13}}{1-\left(\frac{1.03833}{1.018}\right)} \right] = \$23\ 358\ 561$$

al término del décimo tercer mes.

Esta última cantidad también se obtendría de la siguientes forma:

$$A_{13} = \$23\ 103\ 512\ (1.03833) - \$\ 500\,000\ (1.018)^{13} = \$\ 23\ 358\ 561$$

Después de observar estos resultados, el señor Jr. se muestra satisfecho y emocionado, encontrándole gusto al ejercicio y su entusiasmo no es para menos, dado que al finalizar el treceavo mes, su ahorro disponible será mayor que su ahorro inicial y además podrá obtener los recursos para vivir según planeó.

Por su mente cruza la idea de que la fórmula tiene algo de magia, él invirtió únicamente \$20 000 000 y en el treceavo mes tiene \$ 23 358 561 a pesar de haber realizado gastos durante todo ese tiempo.

Pero nada hay de nigromancia, ni de artes preñadas de esoterismos. Si supiera un poco de cálculo diferencial se daría cuenta de que tal efecto se debe a que la expresión algebraica mencionada, como una función de la variable "t", es cóncava hacia el eje de las abscisas, para las condiciones planteadas, teniendo en consecuencia un ahorro máximo para el valor de "t" correspondiente a:

$$t = \frac{\ln G - \ln\left[G - \left(\frac{r-p}{1+p}\right)k\right] - \ln\left[\frac{\ln(1+r)}{\ln(1+p)}\right]}{\ln(1+r) - \ln(1+p)} \; ; r > p \text{ y } G > \left(\frac{r-p}{1+p}\right)k$$

El comportamiento de la función se debe a que el gasto acumulado no alcanza, para ese valor de "t", a contrarrestar el efecto de los intereses que se perciben por el capital ahorrado, existiendo una cantidad positiva de ahorro que se acumula durante varios meses, pero, como consecuencia del acrecentamiento del gasto y de un menor monto en la inversión, posteriormente se dará un descenso acelerado del ahorro disponible, tendiendo éste al valor cero.

Entusiasmado en el asunto, desea saber cuánto tendrá disponible en un período mayor, así que solicita el cálculo para $t = 40$ y $t = 60$. Obteniéndose los siguientes resultados:

A_{40} = \$ 28 431 672
A_{40} = \$ 24 905 195

La satisfacción que muestra nuestro rentista empieza a decaer, como ya lo podíamos haber imaginado, puesto que su ahorro se encuentra en la parte descendente de la función y, si bien los datos indican que su ahorro es superior en términos nominales, la tendencia ahora es descendente y ello debe preocuparlo, debido a que, en realidad se muestra saludable y seguramente vivirá más tiempo que el que indica el último período calculado.

6.2. El ahorro del señor jr. se esfuma

Al percibir que la tendencia, observada en las últimas cantidades de su ahorro, podría continuar y su ahorro desaparecer, el semblante sonriente del señor Jr. se torna un gesto de preocupación y entonces realiza dos preguntas, de cuya respuesta depende que el señor Jr. vaya buscando alternativas, entre las que está el disminuir su consumo o, Dios no lo quiera, tener que regresar a trabajar.

Es así que lanza los siguientes cuestionamientos: de mantenerse las condiciones establecidas. ¿Se hará cero el ahorro? Si esto es cierto. ¿Puede saberse en qué período sucederá?

Desgraciadamente para nuestro frugal amigo la respuesta es afirmativa en ambos casos y para calcular lo que sucede en las dos situaciones se utiliza la fórmula siguiente:

$$t = \frac{\log G - \log \left[G - \left(\frac{r-p}{1+p}\right)k \right]}{\log \left(\frac{1+r}{1+p}\right)} \quad ; r \neq p \text{ y } G > \left(\frac{r-p}{1+p}\right)k$$

cuya deducción se realiza en el anexo 2. Ella nos permite calcular el período t en el que, el ahorro disponible será cero.

Utilizándola para contestar la segunda pregunta, el resultado que se obtiene hace que el cabello se le erice y la preocupación que sentía se torne en angustia, claro que sin llegar a la desesperación, pues él sabe controlar sus emociones.

El cálculo nos indica que sólo podrá vivir de su ahorro hasta el período t=81, lo que es equivalente a un total de tan sólo 6.75 años. Así que si quiere vivir mas tiempo de su inversión, sin tener que trabajar, tendrá que reducir el consumo superfluo que puede realizar con su gasto de $500 000.

7. En busca de alternativas de inversión

No cabe duda que el enfrentar dificultades en cuestiones de dinero permite que el ingenio se agudice.

Un buen ejemplo es el que nos ofrece nuestro rentista, ya que para remontar la adversidad descrita, intenta analizar varias situaciones para su inversión; cree que el problema surge únicamente de la relación entre la tasa de interés y la de inflación, por lo que aún considera que su gasto de \$500 000 es adecuado en relación a su ahorro de \$20 000 000.

Por lo que se decide explorar otras posibilidades, inclusive considera que en otros países habrá más justicia para aquellas personas que quieran vivir de su ahorro y que por ello vale la pena analizar otros escenarios.

El considera que existen las siguientes opciones:

a) Alta inflación con tasa de interés equivalente;
b) Baja inflación con tasa de interés equivalente;
c) Alta inflación con tasa de interés real positiva;
d) Alta inflación con tasa de interés real negativa;
e) Baja inflación con tasa de interés real positiva;
f) Baja inflación con tasa de interés real negativa.

De ellas, su intuición le indica que las correspondientes a los incisos: *d*) y *f*) no le serán en realidad favorables, ya que la sola relación entre tasa de interés y la inflación harían que el poder adquisitivo de su ahorro se redujera.

Eso es exacto, ya que como se puede ver en el anexo 3, se deduce la siguiente relación:

$$K\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t+1} - G\left[\frac{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t+1}}{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)}\right] < K\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t} - G\left[\frac{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t}}{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)}\right]$$

para los escenarios en que $r < p$
siendo esta expresión equivalente a:

$$\frac{A^{t+1}}{(1+p)^{t+1}} < \frac{A^{t}}{(1+p)^{t}}$$

de la que podemos inferir que, en el caso en que la tasa de interés sea menor a la inflación del período, el ahorro disponible, en términos reales se irá reduciendo a medida que t aumenta y por lo tanto el ahorro se hará cero en alguno de estos valores.

En los casos correspondientes a los incisos *a*) y *b*), en las que existe igualdad entre la tasa de inflación y la de interés, el resultado sólo es un poco mejor, debido a que, como se demuestra en el mismo anexo 3, el ahorro también se hará cero, pero ahora en el período $t = K/G$, o en el ejemplo que se aborda:

$t = (\$ 20\,000\,000. / \$ 500\,000.) = 40$

Lo que significa que, en esas condiciones, al término de 40 meses el señor no tendría ahorro alguno, su dinero se habría esfumado.

En el caso de que la tasa de interés sea igual a la de inflación, el valor de t, en el que el ahorro se agotará, no depende de si la tasa de interés y la de inflación son altas o bajas, sino exclusivamente de la relación entre K y G.

De lo anterior, se puede inferir que si existe un escenario con tasas reales de interés negativas, entonces el tiempo en que el ahorro se hará cero es inferior a $t = K/G$.

7.1 El ánimo del señor Jr., se reconforta

No cabe duda que nuestro personaje se encuentra en un aprieto, pero todavía piensa que su problema puede resolverse si es que se toman en cuenta los casos donde la tasa de interés real es positiva y tal vez el de la relación existente entre G y K.

Esto sucede porque, según su razonamiento, en el caso de la tasa de interés real positiva, los ahorros le podrían dar un sobrante de la inflación para consumirlo y en el caso de la relación entre K y G, piensa que a medida que gaste menos, el cociente K/G se hará mayor y por lo tanto podrá extender la duración de su inversión.

La respuesta a estos dos planteamientos se encuentra desarrollada en el anexo 4, en el cual se deduce que para mantener o aumentar el poder adquisitivo del ahorro disponible, no basta tener una tasa de interés positiva en términos reales, además es necesario que se combine esa condición con un cierto nivel de gasto.

Al conocer este escenario, se le tranquiliza el espíritu y se le ilumina el semblante, ya que, si esa posibilidad existe, podrá planear adecuadamente sus gastos para extender lo más posible la duración de su ahorro, lo que le permite ver la vida con optimismo, puesto que por un momento se imaginó el tener que volver a trabajar, en las condiciones que el vecino del norte y la modernidad imponen, en la cervecería donde prestó sus servicios, pero al parecer, esto no es necesario.

Veamos por qué.

Si el señor Jr. deposita su ahorro en una institución bancaria y obtiene por ello una tasa de interés, al final del período contratado tendrá una cantidad de dinero equivalente a $K + rK$, con la que podrá solventar su gasto: $G + pG$.

Pero, la tasa de interés se puede descomponer en dos sumandos, p y r', esto es, $r = p + r'$ ó $r' = r - p$, y como se supone que p (el índice de inflación) es un número positivo (y alto, a pesar de las cifras oficiales), entonces debe suceder una de estas tres posibilidades: $r' > 0$; $r' = 0$ ó $r' < 0$, según se cumpla que, $r > p$, $r = p$ ó $r < p$, respectivamente.

Tomando esto en cuenta, el ahorro al final del período estará definido por la siguiente igualdad:

$$K + Kr = K + K(r' + p)$$

ó en forma equivalente por:

$$K(1 + r) = K(1 + p) + r'K \ldots (13)$$

A esta última igualdad se le puede ajustar por el respectivo índice inflacionario, obteniéndose la cantidad ahorrada en términos reales, definida por la expresión (14).

$$K\left(\frac{1+r}{1+p}\right) = K\left(\frac{1+p}{1+p}\right) + \left(\frac{r'}{1+p}\right)K = K + \left(\frac{r-p}{1+p}\right)K \;...(14)$$

De la igualdad (14) se desprenden tres casos:

1) si $\frac{r-p}{1+p} > 0$; el ahorro aumenta su poder adquisitivo.

2) si $\frac{r-p}{1+p} = 0$; el ahorro mantiene su poder adquisitivo.

3) si $\frac{r-p}{1+p} < 0$ el ahorro pierde su poder adquisitivo.

Es evidente que en los casos de los incisos *2*) y *3*) son incompatibles los objetivos de mantener el poder adquisitivo del ahorro y realizar un consumo con cargo a la cantidad ahorrada. La tasa de interés no es suficiente para compensar ambos efectos: inflación y gasto.

Entonces, una condición necesaria, para lograr el doble propósito de mantener el ahorro en términos reales y además poder gastar una porción de ese ahorro, es que la tasa de interés real sea positiva. Pero, si bien la condición es necesaria, no es suficiente, ya que, adicionalmente debe contemplarse la influencia del gasto para lograr el doble objetivo.

De la igualdad (13), también se deduce que, en relación al gasto, pueden darse tres situaciones:

a) Si $G > \left(\frac{r-p}{1+p}\right)K$ el efecto del gasto superará al efecto positivo de la tasa de interés, disminuyendo el poder adquisitivo del ahorro.

b) Si $G = \left(\frac{r-p}{1+p}\right)K$ el efecto de la tasa de interés será suficiente para sólo mantener el poder adquisitivo del ahorro.

c) Si $G < \left(\frac{r-p}{1+p}\right)K$ el efecto del gasto no anulará en forma suficiente al de la tasa de interés, con lo que el poder adquisitivo del ahorro aumentará. Si bien estas situaciones nos indican lo que sucede en una unidad de tiempo. A lo largo del ejercicio se dará un efecto acumulativo, período tras período, afirmándose las situaciones anteriores para cualquier tiempo "t" que se quiera conocer.

En el anexo 4, se demuestra que:

1) Si $G = (\frac{r-p}{1+p})\, K$ entonces el valor que resulta para A_t es, $A_t = k\,(1+p)^t$, lo que nos indica que el ahorro disponible en el tiempo t es equivalente al capital inicial, multiplicado por el índice inflacionario acumulado hasta el período en cuestión.

Esto significa que, además de haber gastado la cantidad que se indica, se mantuvo el poder adquisitivo del ahorro inicial.

2) Si $G > (\frac{r-p}{1+p})\, K$, entonces el ahorro disponible tiende a deteriorarse.

En este caso, el gasto consume el excedente que da la tasa de interés sobre la inflación, además afecta a una parte del poder adquisitivo del dinero ahorrado, por lo tanto la inversión inicial se deprecia período a período y si esas condiciones se mantienen, el ahorro tiende inexorablemente a desaparecer;

3) Si $G < (\frac{r-p}{1+p})\, K$, el ahorro disponible tiende a incrementarse en términos reales a lo largo del tiempo, como consecuencia de que está acumulándose en la inversión una parte creciente de interés que recibe el ahorro en cada período.

De estos razonamientos se puede extraer una respuesta para los escenarios donde existe una tasa real de interés positiva. Para obtener una mayor acumulación al ahorro inicial, en términos reales, –aun si se realiza un consumo–; lo que importa no es el nivel nominal de la tasa de interés (r), ni su diferencia con la tasa de inflación ($r - p$), sino la proporción que guarda esta diferencia en relación con respectivo índice inflacionario, siendo éste el cociente que se representa de la siguiente forma: $\frac{r-p}{1+p}$

la que nos indica cuál es la tasa real de interés.

Esta relación es la determinante para decidir qué escenario es más conveniente al realizar una inversión. Mientras mayor sea este cociente, más grande será el poder adquisitivo del ahorro y más conveniente para el ahorrador y el rentista.

Analizando la circunstancia en las que se desenvuelve el señor Jr., es claro que únicamente podrá cumplir con el doble objetivo de mantener el poder adquisitivo de su ahorro y realizar un consumo determinado, si la tasa de interés real es positiva y si su gasto es inferior o igual a:

$$\left(\frac{r-p}{1+p}\right) K$$

Aplicando los datos que propone el señor Jr. para el ejercicio, se obtiene que el monto máximo de gasto inicial que le permite cumplir con el doble propósito es:

$$\left(\frac{0.03833-0.018}{1.018}\right) (\$20\ 000\ 000) = \$399\ 411$$

el cálculo nos indica que no podrá alcanzar el nivel de gasto deseado de $500 000 de modo que, si quiere mantener el poder adquisitivo de su ahorro tendrá que reflexionar sobre la posibilidad de disminuir esa cantidad que ha programado.

8. El señor Jr. considera una alternativa egoísta

En el periódico se ha publicado que el promedio de vida en su país es de 65 años. Además él siente que se encuentra rebosante de salud y considera que bien puede vivir las 15 primaveras que le faltan para alcanzar ese promedio, luego hace la siguiente pregunta: ¿Cuánto debo ahorrar ahora para recibir cada mes, a lo largo de los 15 años, un equivalente a $500 000 actuales, haciéndose cero la inversión disponible al final del período? Tiempo en el que espera que se haga cierta en él la máxima keynesiana: a la larga todos seremos difuntos. Esta situación surge porque considera al dinero como fuente de dificultades y no quiere dejar problemas con la herencia, además, y en última instancia dice que sus herederos ya están capacitados para lograr por sí solos lo que él con tanto esfuerzo ha conseguido.

Este cuestionamiento también tiene respuesta, obteniéndose dos casos (Ver anexo 5).

a) Existe igualdad entre las tasas de interés y de inflación.

b) La tasa de interés es diferente a la de inflación.

En el primero, el monto de capital inicial necesario es:

$$K = t\,(G)$$

Para el segundo caso se utiliza la fórmula:

$$K = \frac{G\,(1+p)[\,(1+p)\mathrm{t} - (1+r)^{t}]}{(1+r)(p-r)} \quad ...(15)$$

De acuerdo a las condiciones planteadas por el señor Jr. se utiliza la expresión (15), resultando lo siguiente:

$$K = \frac{\$\ 500\ 000(1.018)[(1.018)180 - (1.03833)180]}{(1.03833)180(0.018-0.03833)} = \$24\ 324\ 353$$

Esta cantidad también está fuera de las posibilidades presentes de nuestro ahorrador, lo que obviamente le provoca malestar, puesto que ninguno de sus propósitos ha podido realizarse por completo.

Molesto, considera que todo esto es sólo un juego de números, que no se corresponde con la realidad, ni con su ilusión y piensa que su ahorro actual es una cantidad muy grande y le puede durar eternamente, aun gastando más de los \$ 500 000, allá él.

9. La utilidad del modelo

Para iniciar la explicación, acerca de la utilidad del modelo, le pedimos al lector su comprensión, porque se hará en forma de diálogo, ya que pensamos que ésta es una forma razonable para que el señor Jr. capte lo que le decimos y él mismo realice la deducción, además, estando entretenido en pensar será más difícil que, debido a su malestar, pueda realizar una agresión. El señor Jr. dialogará con Ejecutivo B., de seguro se entenderán y llegarán a un acuerdo en torno a la aplicación del modelo.

Ejecutivo B.: ¿Cuánto dinero tiene para invertir?

Sr. Jr.: Tengo $ 20 000 000. Ahorro que es producto de mi trabajo en la cervecería.

Ejecutivo B.: ¿Considera usted que existen otras personas que tengan dinero y lo quieran ahorrar en una institución bancaria para vivir de él?

Sr. Jr.: En efecto, tan sólo en la cervecería existen varias personas.

Ejecutivo B.: Considera usted que, si son distintas las cantidades para invertir, habría alguna forma de representarlas y saber que se está refiriendo a cada uno de los casos en particular, por ejemplo una letra, digamos la letra K, a la que se puede llamar ahorro inicial.

Sr. Jr.: Sí, eso es cierto, así que, cuando se me pregunte cuál es mi K, sabré que se refiere al ahorro, y diré que en mi caso es equivalente a $ 20 000 000.

Ejecutivo B.: El banco le pagará una tasa de interés, lo que representa una cantidad de dinero adicional a su capital invertido en cada período.

Sr. Jr.: Sí, cualquier banco decente haría eso y en este país todavía hay decencia. Pienso que mi dinero será una cantidad mayor y podré pagar mis gastos con puntualidad.

Ejecutivo B.: No acaso, con la tasa de interés se puede hacer lo mismo, por ejemplo nombrarla por medio de la letra r, la cual multiplicada por su ahorro inicial le dará un total de $r(K)$ ó rK en intereses y $K + rK$ como dinero disponible, lo que podría aplicarse a cada una de las personas que estén en el mismo caso.

Sr. Jr.: Sí, eso es cierto, en mi caso no hay problema porque así sea, pero no puedo hablar por los demás, aunque no creo que tengan inconveniente.

Ejecutivo B.: Si recuerda lo que se ha expuesto, usted realizará un gasto, que llamaremos G, el cual de seguro estará afectado por una tasa de inflación p, habiendo gastado un total $G + pG$ ó $G(1 + p)$.

Sr. Jr.: Eso está bien y además podrá decirse que esa expresión abarca a todos los casos posibles.

Ejecutivo B.: Correcto, vamos bien. Ahora piense en lo siguiente, no acaso le gustaría pagar todos sus gastos al fin de mes, sobre todo si no le hacen cargos adicionales.

Sr. Jr.: Si eso es una gran ventaja, que además es posible y desde luego programaría que mi gasto fuese inferior a mi ahorro y creo que inferior a los intereses que me pagaran.

Ejecutivo B.: En ese caso, ¿cuánto dinero tendría para ahorrar nuevamente en cada unidad de tiempo?

Sr. Jr.: Pues, tendría mi ahorro inicial y los intereses que me pagó el banco, pero de ahí tendría que reducir lo que he gastado.

Ejecutivo B.: Eso significar que usted podrá ahorrar la cantidad siguiente: $A_1 = K(1{+}r) - G(1{+}p)$ al finalizar la primer unidad de tiempo.

Sr. Jr.: Sí, así sería, y obviamente lo volvería a ahorrar para que me durara más tiempo.

Ejecutivo B.: Si esto es verdad, ¿Cuál sería su dinero disponible al final del siguiente mes?

Sr. Jr.: Eso es difícil de contestar ahora porque necesitaría saber que tasa de interés me van a pagar y la tasa de inflación de ese mes.

Ejecutivo B.: Tiene usted razón, comprendo que es una situación complicada, para la cual no creo que pudiéramos encontrar remedio satisfactorio, ni que alguien pudiera orientarnos con toda claridad al respecto. Pero, ¿no acaso se puede pensar que las condiciones presentes pueden repetirse en el futuro y con ello obtener expectativas acerca del comportamiento de situaciones que se desea prever?

Sr. Jr.: No creo que las condiciones se puedan repetir en el futuro con exactitud, aunque sí creo que pueda haber condiciones similares, pero si están antecedidas por otras que son muy distintas, entonces, toda similitud será ilusoria. Pero lo que sí puede hacerse es proyectarla, diciendo que se considera ese pronóstico, bajo la condición de que la situación presente se mantenga a lo largo de todo el tiempo que se analiza.

Ejecutivo B.: Me parece adecuado su razonamiento y creo que nos puede servir para los fines propuestos, las limitantes que usted ha expuesto son las mismas consideraciones que debemos tener en la mente al momento de realizar la proyección de las condiciones. Pero, entonces ¿considera válido que pueda hacerse esa proyección para tener una idea del futuro?

Sr. Jr.: Bajo esas circunstancias sí puede hacerse, pero sólo como una idea con restricciones. En tal caso, mi ahorro disponible al final del segundo mes sería: $A_2 = A_1(1+r)\text{-G}(1+p)^2$ que es una expresión conocida.

Ejecutivo B.: Bien, como esa igualdad se le hace conocida, de la misma forma se pueden recordar otras ya enunciadas, por ejemplo para el mes número t se nos ha dicho que la fórmula es: $A_t = A_{t\text{-}1}(1+r)\text{-}G(1+p)^t$. ¿Le parecería ella adecuada para representar el monto de ahorro en ese período?

Sr. Jr.: Sí, me parecen adecuadas, con los inconvenientes mencionados.

Ejecutivo B.: Bueno, si ellas le parecen adecuadas, ¿le pondría algún pero a la manera de encontrar las fórmulas equivalentes para expresar otras relaciones y a las conclusiones que sobre ellas se obtienen en lo relativo a la inversión que se realiza?

Sr. Jr.: Conozco muy poco de matemáticas y no sé si la forma de encontrar las ecuaciones equivalentes es correcta aunque me pareció lógica su presentación y creo que los ejemplos funcionaron y servirían para tener una idea de ocurrencias en el futuro sobre mi ahorro, pero la verdad no tengo idea de su grado de certeza. Tal vez una persona que sí conozca de matemáticas puede sacarnos de la duda y decirnos si eso es lo que realmente sucede. Sobre las conclusiones en relación a mi ahorro, eso sólo podrá saberse con el tiempo, ahora parecen lógicas, pero el tiempo dirá, espero que no me perjudique si llego a tomar una decisión sobre esas conclusiones. Debo decirle que los resultados me parecieron lógicos y no me gustaron por completo.

Ejecutivo B.: Eso sólo es un ejemplo, lo que deseo saber es si le parece lógico y si cree que se pueda aplicar como una forma de conocer lo que puede pasar en el futuro, del cual sabemos que es incierto y que conviene prever situaciones para tomar algunas medidas ahora.

Sr. Jr.: Creo que sí es necesario hacer previsiones, aunque no resulten una completa certidumbre.

Ejecutivo B.: Sí, comprendo, ...

Sr. Jr.: Perdóneme la interrupción, pero se me ocurre que el modelo puede tener cierta flexibilidad, ya que si cada mes cambian las condiciones, esto se puede incluir y en ese caso las proyecciones serían más realistas, pudiendo adecuarse las expectativas con mayor variabilidad, situación que coincide mejor con lo que realmente sucede.

Ejecutivo B.: Esa es una buena idea y sirve adecuadamente al propósito; pudiera darse el caso de incluir la cantidad prevista para varios escenarios de tasas de interés, de inflación, capital inicial y gasto. Permitiéndonos anticipar en alguna forma algún problema que pudiera deducirse.

Sr. Jr.: Esto que comentamos parece lógico, pero aun pensando que el sustento matemático fuera correcto, la previsión no puede realizarse más que con grado relativo de éxito y por lo tanto el error puede ser grande. Además sólo estamos hablando de números, de conceptos abstractos y mi dinero es muy concreto y como considero que es una cantidad muy grande, voy a gastarlo como lo he planeado, siento que me durará mucho tiempo y si no, pues... ya veremos. Adiós y gracias por la explicación, voy a iniciar mi consumo con el gasto que he planeado.

Como se puede apreciar, el señor Jr. no quedó muy convencido de la utilidad del modelo, pero del diálogo se pueden deducir que acepta algunas ideas que pueden destacarse:

- Como todo modelo, éste sólo puede representar en forma aproximada a la realidad.
- La expresión matemática debe analizarse desde la visión de ella misma.
- El propio desarrollo de las fórmulas permitió inducir ideas sobre otras relaciones, así como del contenido económico de las variables que se incluyen, obteniéndose con ello conclusiones interesantes para esta última disciplina.
- Si bien, el modelo puede servir para tener una idea del comportamiento futuro del ahorro, tiene poca flexibilidad para incluir diferentes datos en un mismo escenario, también esta situación la comparte con la generalidad de los modelos económicos. Pero, puede adaptarse para observar diferentes escenarios, cuando alguno de los datos se modifique.
- La fórmula encontrada presenta, en términos de predicción, las mismas limitaciones que las referentes al interés compuesto, pero tiene la ventaja de incluir a un gasto afectado por un nivel inflacionario.
- Otra de las cuestiones que se puede concluir es que la contradicción entre lo abstracto del modelo, los resultados de los ejercicios –por un lado– y lo concreto de las decisiones que se deben tomar en el presente, no se resuelve. El modelo continúa siendo sólo una visión de lo que puede suceder, pero, de seguro no se cumplirá, no obstante, es conveniente

tener una idea de la posibilidad y buscar las modificaciones que permitan un mejor acercamiento a lo que realmente sucede.
Aunque el modelo tiene el sustento del razonamiento matemático, es conveniente tener siempre la idea de que eso no explica el contenido, puede indicarnos que hacer y es la comparación con los datos concretos lo que nos permite juzgar sobre su aplicabilidad, no sobre la certeza de la expresión algebraica, pero si sobre el grado de aproximación en que describe una realidad empírica, esto último es lo que importa para las decisiones que debe tomar quien enfrenta un problema concreto.

Anexo 1

(Demostración de la primera opción)

Demostración de la igualdad:

$$A_t = K(1+r)^t - G \sum_{m=1}^{t} (1+p)^m(1+r)^{t-m} =$$

$$K(1+r)^t - G(1+p)^t \left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^t}{1 - (\frac{1+r}{1+p})} \right] \quad ...(A1)$$

Para realizar la demostración, se tomará como base de una deducción de tipo directo, el conocido razonamiento que permite efectuar la suma de los primeros n términos de una serie geométrica, que se incluirá como un teorema necesario para demostrar la primera proposición:

Si $a, aR, aR^2 ... aR^{n-1}$ son los primeras n términos de la serie geométrica, que tienen como término inicial al número "a" y como razón de cambio al número "R", entonces se cumple que la igualdad siguiente:

$$Sn = a+ar+ar^2+...+ar^{n-1} = \frac{a(1+R^n)}{1-R} \quad ...(A2)$$

Hipótesis : $Sn = a+aR+aR^2t...+aR^{n-1}$

Representa la suma de los primeras n términos de la serie geométrica con primer término "a" y razón de cambio "R".

Tesis: Sn es igual a la expresión $A2$.

Demostración:

Al multiplicar ambos miembros de la igualdad ($A2$) por la razón de cambio "R" se obtiene:

$$R\,Sn = aR + aR^2 + aR^3 + \ldots + aR^n \ldots (A3)$$

Restando la igualdad ($A3$) de la ($A2$) resulta:

$$Sn - RSn = a + aR - aR + aR^2 - aR^2 - aR^2 + \ldots + aR^{n-1} - aR^{n-1} - aR^n$$

igualdad de la cual se pueden reducir términos semejantes, obteniéndose:

$$Sn - RSn = a - aR^n$$

de esta última expresión, se puede factorizar Sn en el primer miembro y "a" en el segundo, resultando la igualdad:

$$Sn(1-R) = a(1-R^n)$$

y al despejar Sn resulta:

$$Sn = \frac{a(1-R^n)}{1-R} \quad \ldots (A4)$$

Que es la igualdad que deseábamos obtener y con ella se puede obtener la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica con primer elemento "a" y razón de cambio "R".

Regresando a la expresión ($A1$) se observa que sólo es necesario demostrar la igualdad:

$$\sum_{m=1}^{t} (1+p)^{m}(1+r)^{t-m} = (1+p)^{t} \left[\frac{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t}}{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)} \right] ; p \neq r$$

Para lograr el propósito, iniciamos un razonamiento directo con el primer miembro de esta igualdad, obteniéndose en un primer paso que:

$$\sum_{m=1}^{t} (1+p)^{m}(1+r)^{t-m}=(1+p)(1+r)^{t-1}+(1+p)^{2}(1+r)^{t-2}+...+(1+p)^{t-2}(1+r)+(1+p)^{t}(1+r)^{0}...(A5)$$

Además el segundo miembro de ($A5$) se puede arreglar de la siguiente forma:

$$(1+p)^{t}(1+r)^{0}+(1+p)^{t-1}(1+r)+...+(1+p)^{2}(1+r)^{t-2}+(1+p)(1+r)^{t-1}$$

expresión que representa a la suma de una serie geométrica con primer término: $(1+p)^{t}(1+r)^{0}=(1+p)^{t}$ y con razón de cambio:

$$R = (\frac{1+r}{1+p})$$

por lo que al considerar la igualdad ($A4$) resulta verdadera la expresión:

$$\sum_{m=1}^{t} (1+p)^{m}(1+r)^{t-m}=(1+p)^{t}\left[\frac{1-(\frac{1+r}{1+p})^{t}}{1-(\frac{1+r}{1+p})}\right];p\neq r$$

por lo tanto, también es cierto que se cumple la igualdad.

$$A_{t}=K(1+r)^{t}+G\sum_{m=1}^{t} (1+p)^{m}(1+r)^{t-m}=K(1+r)^{t}-G(1+p)^{t}\left[\frac{1-(\frac{1+r}{1+p})t}{1-(\frac{1+r}{1+p})}\right];p\neq r$$

En forma similar se puede demostrar que:

$$A_t = K(1+r)^t - G\sum_{m=1}^{t} (1+p)^m (1+r)^{t-m} = K(1+r)^t - G(1+p)(1+r)^{t-1} \left[\frac{1 - (\frac{1+p}{1+r})^t}{1 - (\frac{1+p}{1+r})} \right] \quad ; p \neq r$$

Anexo 2

(Deducción del período *t* en que el ahorro se anula)

En este punto se demuestra que la expresión:

$$t = \frac{\log G - \log [G - (\frac{r-p}{1+p}) K]}{\log (\frac{1+r}{1+p})} \quad ; r \neq p;\ G > (\frac{r-p}{1+p}) K ...(A6)$$

se cumple cuando $A_t = 0$

También en este caso se usará una demostración de tipo directo.
Para ello recordemos que anteriormente se demostró que

$$A_t = K(1+r)^t - G(1+p)^t \left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^t}{1 - (\frac{1+r}{1+p})} \right] \quad ; p \neq r$$

es una expresión verdadera para t=1,2,3.... por lo que se puede tomar como base del razonamiento.

Hipótesis: la expresión ($A1$) es cierta.
Tesis: la igualdad ($A6$) es cierta cuando A_t=0.

Demostración:

En ($A1$) se efectúan las operaciones ubicadas dentro del paréntesis cuadrado resultando la igualdad ($A7$) siguiente:

$$A_t = K(1+r)^t - G(1+p)^t \left[\frac{(1+p)[(1+p)^t-(1+r)^t]}{(p-r)(1+p)t}\right] \quad ; p \neq r \ldots (A7)$$

En ($A7$) se realiza la multiplicación del numerador y se reducen términos semejantes, obteniéndose:

$$A_t = K(1+r)^t - \frac{G(1+p)^{t+1}}{(p-r)} + \frac{G(1+p)(1+r)^t}{(p-r)} ; p \neq r \ldots (A8)$$

Arreglando esta expresión para tener, en el segundo miembro, únicamente como exponente al valor de "t" resulta:

$$\frac{At(p-r)}{(1+p)^{t+1}} = \left(\frac{p-r}{1+p}\right)\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^t K + \left(\frac{1+r}{1+p}\right)^t G - G \ldots (A9)$$

Como $A_t = 0$ y dejando en el segundo miembro sólo a los términos que contienen a "t" se deduce que:

$$G = \left(\frac{p-r}{1+p}\right)\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^t K + \left(\frac{1+r}{1+p}\right)^t G \ldots (A10)$$

expresión de la que se puede factorizar: $\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^t$

y de la que resulta:

$$G = \left[\left(\frac{p-r}{1+p}\right) K + G\right]\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^t \ldots (A11)$$

de ésta se puede despejar t, por medio de logaritmos, obteniendo como resultado la igualdad:

$$t = \frac{\log G - \log\left[\left(\frac{p-r}{1+p}\right) K + G\right]}{\log\left(\frac{1+r}{1+p}\right)} \; ; G > \left(\frac{r-p}{1+p}\right) K \; ; p \neq r \ldots$$

ó

$$t = \frac{\log G - \log\left[G - \left(\frac{r-p}{1+p}\right) K\right]}{\log\left(\frac{1+r}{1+p}\right)} \; ; G > \left(\frac{r-p}{1+p}\right) K \; ; p \neq r \ldots (A12)$$

Anexo 3

(Comportamiento del ahorro como una consecuencia de la relación entre la tasa de interés nominal y la tasa de inflación)

Se analizarán, utilizando un procedimiento de prueba de tipo directo, dos casos: $r<p$ y $r=p$. El caso en que $r>p$ se considerará en el siguiente anexo:

Caso 1. La tasa de interés es equivalente a la de inflación: $r = p$

Hipótesis: $(A1)$ y $r = p$ son igualdades verdaderas.
Tesis: se cumple la expresión siguiente:

$$A_t = (K-tG)(1-r)^t$$

Tomemos como inicio la expresión:

$$A_t = K(1+r)^t - G\sum_{m=1}^{t} (1+p)^m(1+r)^{t-m}$$

y dado que $r = p$, se tienen las siguientes expresiones verdaderas:

$$A_t = K(1+r)^t - G\sum_{m=1}^{t} (1+r)^m(1+r)^{t-m}$$

$$A_t = K(1+r)^t - G\sum_{m=1}^{t} (1+r)^{m+t-m}$$

$$A_t = K(1+r)^t - G\sum_{m=1}^{t} (1+r)^t$$

que se obtienen de sustituir "r" por su igual "p" y de sumar los coeficientes, debido a que la base es la misma en los términos que están dentro de la sumatoria.

Como consecuencia de que la sumatoria involucra la suma de "t" elementos equivalentes a: $(1+r)^t$ resulta, al realizar la suma, la igualdad:

$$A^t = K(1+r)^t - G(t)(1+r)^t$$

en la que se puede factorizar $(1+r)^t$ obteniéndose:

$$A_t = (K - tG)(1+r)^t$$

Esta expresión nos indica que, si $r = p$, el ahorro se irá reduciendo, a medida que t vaya aumentando, volviéndose cero cuando:

$$K - tG = 0$$

ó

$$t = {}^{K}\!/_{G}$$

Caso 2. La tasa de interés es inferior a la tasa de inflación: $0 < r < p$.

Hipótesis: ($A1$) es verdadera, la tasa de interés es positiva y menor que la tasa de inflación.

Tesis: las expresiones ($A17$) y ($A17'$) son ciertas.

Si $0 < r < p$ se puede deducir que es verdadera la siguiente desigualdad:

$$0 < \frac{1+r}{1+p} < 1$$

multiplicándola por $(\frac{1+r}{1+p})^t$ se obtiene:

$$(\frac{1+r}{1+p})^{t+1} < (\frac{1+r}{1+p})^t \quad ...(A13)$$

asimismo, se puede deducir fácilmente que:

$$- G\left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^{t+1}}{1 - (\frac{1+r}{1+p})}\right] < - G\left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^{t}}{1 - (\frac{1+r}{1+p})}\right] \ldots (A14)$$

Sumando la cantidad $K\ (\frac{1+r}{1+p})^{t+1}$ ambos miembros de la desigualdad $(A14)$ resulta la expresión $(A15)$:

$$K(\frac{1+r}{1+p})^{t+1} - G\left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^{t+1}}{1 - (\frac{1+r}{1+p})}\right] < K(\frac{1+r}{1+p})^{t+1} - G\left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^{t}}{1 - (\frac{1+r}{1+p})}\right] \ldots (A15)$$

Si a la expresión del segundo miembro de $(A15)$ se le aumenta la cantidad positiva: $K\,(\frac{1+r}{1+p})^{t} - K\,(\frac{1+r}{1+p})^{t+1}$ se obtiene la doble desigualdad siguiente:

$$K(\frac{1+r}{1+p})^{t+1} - G\left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^{t+1}}{1 - (\frac{1+r}{1+p})}\right] < K(\frac{1+r}{1+p})^{t+1} - G\left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^{t}}{1 - (\frac{1+r}{1+p})}\right]$$

y

$$K\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t+1} - G\left[\frac{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t+1}}{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)}\right] < K\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t+1} + K\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t} - K\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t+1} - G\left[\frac{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t}}{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)}\right] \ldots(A16)$$

de donde resulta, en conclusión, que cuando $r < p$ se cumpla que:

$$K\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t+1} - G\left[\frac{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t+1}}{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)}\right] < K\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t+1} - G\left[\frac{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^{t}}{1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)}\right] \ldots(A17)$$

Expresiones que son equivalentes en forma respectiva a:

$$\frac{A_{t+1}}{(1+p)^{t+1}} \text{ y } \frac{A_t}{(1+p)^t}$$

Con esto, la desigualdad a continuación es cierta:

$$\frac{A_{t+1}}{(1+p)^{t+1}} < \frac{A_t}{(1+p)^t} \ldots(A17')$$

esta expresión nos indica lo siguiente: cuando $r < p$, el ahorro disponible, en términos reales, se reduce a medida que el número de períodos aumenta y con ello también lo hace el ahorro disponible en términos nominales.

Anexo 4

(Comportamiento del ahorro como resultado de la adopción de un nivel de gasto inicial y de una tasa de interés real positiva)

Se consideran 3 casos y para cada uno se supone que la tasa de interés es positiva y superior a la tasa de inflación: $r > p$

Caso 1: El nivel de gasto es equivalente al rendimiento real que produce el capital:

$$G = \left(\frac{r-p}{1+p}\right) K$$

Sea:

$$A_t = K(1+r)^t - G(1+p)^t \left[\frac{1 - \left(\frac{1+r}{1+p}\right)^t}{1 - \left(\frac{1+r}{1+p}\right)}\right]$$

en donde se reducen las fracciones del cociente enmarcado en corchetes resultando:

$$A_t = K(1+r)^t - G(1+p)^t \left[\frac{(1+p)^t - (1+r)^t}{(1+p)^t}\right] \left[\frac{1}{\frac{(1+p)-(1+r)}{1+p}}\right]$$

en esta expresión, se sustituye G por su equivalente y se factoriza $(1+p)^t$ obteniéndose:

$$A_t = K(1+r)^t - K \left[\frac{r-p}{1+p}\right] \left[(1+p)^t - (1+r)^t \right] \left[\frac{1+p}{p-r}\right]$$

en la cual se arreglan los factores, resultando:

$$A_t = K\,(1{+}r)^t - K\,[\frac{r-p}{1+p}]\,[\frac{1+p}{p-r}]\,[\,(1{+}p)^t - (1{+}r)^t\,]$$

Simplificando esta expresión se obtienen las siguientes igualdades:

$$A_t = K\,(1{+}r)^t + K\,(1{+}p)^t - K\,(1{+}r)^t$$

ó

$$A_t = K\,(1{+}p)^t \;...(A18)$$

De esta última se puede concluir que si el gasto planeado es igual al rendimiento real, entonces, el ahorro al fin del período "t" es equivalente al capital inicial ajustado por el índice de inflación acumulada hasta ese período. Es decir, se puede realizar ese nivel de gasto y al ahorro inicial mantiene su poder adquisitivo para cada unidad de tiempo.

Caso 2: El nivel de gasto es inferior al rendimiento real que obtiene el capital:

$$0 < G < (\frac{r-p}{1+p})\,K$$

ó

$$G + K' = (\frac{r-p}{1+p})\,K;\ K' > 0 \;...(A19)$$

De la expresión ($A1$) se deduce fácilmente la igualdad:

$$A_t = K\,(1{+}r)^t - G\,(1{+}p)^t \left[\frac{(1{+}p)^t - (1{+}r)^t}{(1{+}p)^t}\right] (\frac{1+p}{p-r})$$

ó

$$A_t = K\,(1{+}r)^t - G\,[\,(1{+}p)^t - (1{+}r)^t\,](\frac{1+p}{p-r})$$

Sustituyendo el valor de G dado en (A19) se obtiene:

$$A_t = K(1+r)^t - \left[\left(\frac{r-p}{1+p}\right) K - K' \right] \left[(1+p)^t - (1+r)^t \right] \left(\frac{1+p}{p-r}\right)$$

Aplicando en esta igualdad la propiedad distributiva resulta:

$$A_t = K(1+r)^t + \left(\frac{p-r}{1+p}\right) K \left[(1+p)^t - (1+r)^t \right] \left[\frac{1+p}{p-r}\right] + K' \left(\frac{1+p}{p-r}\right) \left[(1+p)^t - (1+r)^t \right]$$

en la que al suprimir algebraicamente los términos correspondientes obtenemos:

$$A_t = K(1+r)^t + K(1+p)^t - K(1+r)^t + K' \left(\frac{1+p}{p-r}\right) \left[(1+p)^t - (1+r)^t \right]$$

y reduciendo términos semejantes:

$$A_t = K(1+p)^t + K' \left(\frac{1+p}{p-r}\right) \left[(1+p)^t - (1+r)^t \right]$$

Esta última igualdad tiene los dos sumandos del miembro de la derecha positivos, en consecuencia se puede afirmar que: si se gasta una cantidad inferior al rendimiento real que obtiene el capital, entonces el ahorro que se obtiene, en el tiempo t, es superior al capital actualizado por el índice inflacionario hasta ese período.

Caso 3: El nivel de gasto es superior al rendimiento real que obtiene el capital:

$$G > \left(\frac{r-p}{1+p}\right) K$$

ó

$$G = \left(\frac{r-p}{1+p}\right) K + G'; \; G' > 0 \ldots (A20)$$

Para esta demostración, partamos de la siguiente igualdad verdadera:

$$A_t = K\,(1+r)_t - G\,[(1+p)^t - (1+r)^t\,]\,(\frac{1+p}{p-r})$$

sustituyendo el valor de G, dado en ($A20$) se obtiene:

$$A_t = K\,(1+r)^t - \left[(\frac{r-p}{1+p})\,K + G'\right]\left[(1+p)^t - (1+r)^t\right](\frac{1+p}{p-r})$$

y aplicando la propiedad distributiva tenemos:

$$A_t = K\,(1+r)^t + K\,(\frac{p-r}{1+p})\,(\frac{1+p}{p-r})\,[\,(1+p)^t - (1+r)^t\,] - G'\,[\,(1+p)^t - (1+r)^t\,]\,(\frac{1+p}{p-r})$$

en esta igualdad reducimos algebraicamente los términos correspondientes, resultando:

$$A_t = K\,(1+r)^t + K\,(1+p)^t - K\,(1+r)^t - G'\,[(1+p)^t - (1+r)^t\,]\,(\frac{1+p}{p-r})$$

ó

$$A_t = K\,(1+p)^t - G'\,[(1+p)^t - (1+r)^t\,]\,(\frac{1+p}{p-r})$$

debido a que el último sumando será siempre negativo, el ahorro en el período "t" es inferior al capital ajustado por el índice inflacionario correspondiente, tendiendo a reducir el ahorro disponible hasta anularse cuando:

$$t = \frac{\log\left[K - G'\,(\frac{1+p}{p-r})\right] - \log\left[G'\,(\frac{1+p}{p-r})\right]}{\log\,(\frac{1+r}{1+p})}$$

Anexo 5

(Deducción de la fórmula para obtener el capital inicial necesario para mantener un nivel de gasto constante en términos reales y que extinga el ahorro en un tiempo *t* determinado)

Existen dos caso:

1) cuando p es diferente de r.

2) cuando p es igual con r.

Caso 1: p es diferente de r.

Ya sabemos que la fórmula:

$$A_t = K\,(1+r)^t - G\,(1+p)^t \left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^t}{1 - (\frac{1+r}{1+p})}\right] ; p \neq r$$

nos proporciona la cantidad de ahorro disponible al finalizar el período "t" y que, en el caso que nos ocupa, será cero en tal valor de t.

Además, la expresión anotada incluye al capital inicial, capitalizado hasta el período mencionado y como deducción de éste se tiene al gasto de cada período, inclusive el del último lapso de tiempo, afectado cada uno por el correspondiente índice inflacionario.

En consecuencia, de dicha expresión debe despejarse el valor de K, para saber que cantidad debe ahorrarse inicialmente para deducir en cada unidad de tiempo un nivel de gasto G actualizado por el índice inflacionario correspondiente.

Es así que de la igualdad:

$$0 = K\,(1+r)^t - G\,(1+p)^t \left[\frac{1 - (\frac{1+r}{1+p})^t}{1 - (\frac{1+r}{1+p})}\right] ; p \neq r$$

se despeja K y después de efectuar las operaciones que están dentro del paréntesis cuadrado resulta:

$$K = \frac{G\,(1+p)^{t} \left[\dfrac{(1+p)\,[\,(1+p)^{t} - (1+r)^{t}\,]}{(p-r)\,(1+p)^{t}} \right]}{(1+r)^{t}} \quad ; p \neq r$$

expresión, de la que al reducir términos y expresándola como una fracción simple queda:

$$K = \frac{G\,(1+p)\,[(1+r)^{t} - (1+r)^{t}\,]}{(1+r)^{t}\,(p-r)} \quad ; p \neq r$$

Caso 2: p es igual con r: $p = r$

Del caso 1 de este anexo 5 sabemos que:

$$K = \frac{G\,(1+p)^{t} \left[\dfrac{(1+p)\,[\,(1+p)^{t} - (1+r)^{t}\,]}{(p-r)\,(1+p)^{t}} \right]}{(1+r)^{t}} \quad ; p \neq r$$

ó en forma equivalente

$$K = \frac{G \sum_{m=1}^{t} \quad (1+p)^{m}\,(1+r)^{t-m}}{(1+r)^{t}}$$

En esta igualdad se sustituye "r" por su igual "p" resultando la siguiente expresión que es verdadera:

$$K = \frac{G \sum_{m=1}^{t} (1+p)^{m} (1+r)^{t-m}}{(1+r)^{t}}$$

en la que, los términos de la sumatoria se pueden reducir de la siguiente manera:

$$K = \frac{G \sum_{m=1}^{t} (1+r)^{t}}{(1+r)^{t}} = G \frac{t\,(1+r)^{t}}{(1+r)^{t}}$$

hasta obtener la igualdad:

$K = (G)\,(t)$

ó

$K = tG$

expresión que nos indica lo siguiente: El capital inicial necesario para mantener un nivel de gasto constante en términos y que extinga el ahorro en un tiempo "t" determinado es equivalente a multiplicar el nivel inicial de gasto por el período de tiempo escogido.

Glosario

AHORRO. Remanente del ingreso que no es consumido o gastado.

CERTEZA. Conocimiento acabado, tanto en la afirmación en sí como en el procedimiento lógico del que ha surgido.

CIENCIA. Conjunto de conocimientos que se refieren al mismo objeto, existe en ellos una relación de fundamentación lógica, que refleja las relaciones existentes en el objeto mismo, esto es, sus razones ontológicas.

CONCEPTO. Representa la expresión abstracta de un objeto, es su representación, sin enunciar nada sobre él.

COROLARIO.Proposición que se deduce fácilmente de lo ya demostrado.

ELEMENTOS PRIMITIVOS. En matemáticas son los conceptos cuya existencia se acepta sin necesidad de definirlos; se comprenden por medio de la intuición. Los elementos definidos requieren la existencia de otros para obtener su comprensión.

ENUNCIADO.Expresión verbal o escrita de una proposición.

FENÓMENO. Se refiere a lo contemplado o vivido. En este sentido los fenómenos se refieren a entidades conceptuales (*v.gr.* elementos de la matemática) o a elementos que se obtienen de la experiencia (*v.gr.* la actividad humana)

FORMAL. Es lo relativo a las formas, en contraposición a lo esencial. La formalización es el procedimiento racional, mediante el que se expresan en símbolos y fórmulas los conceptos lógicos y las relaciones existentes entre ellos.

INFLACIÓN.Proceso que refleja un desequilibrio en la estructura económica y se manifiesta a través del crecimiento sostenido y generalizado del precio de los bienes y servicios. La tasa de inflación es la proporción en que se elevan los precios en relación a los registrados en una fecha determinada.

LEMA. Teorema necesario para una demostración, pero que se toma sin demostrarlo en ese momento.

MÉTODO. Proceso racional que, según el tipo de realidad, conduce a obtener el conocimiento. En algunas ciencias los procesos racionales no son únicos, es posible obtener el saber por una conjunción de varios métodos.

OBJETO (de estudio). El acto de conocer implica una relación sujeto(el que conoce) y objeto (lo que se conoce). Objeto es todo aquello a lo que se dirige la acción de conocer. Un aspecto de la realidad sólo es objeto en cuanto sea sometido a la relación de conocimiento. El tipo de realidad nos indica que clase de objeto se estudia(*v.gr.* el triángulo es un objeto de tipo formal)

PODER ADQUISITIVO. El poder adquisitivo del dinero se mide en relación a la canasta de bienes que puede comprar una cantidad monetaria. Tiene sentido si se compara el poder adquisitivo en fechas diferentes, donde una de ellas es el período base.

PROPOSICIÓN. Oración gramatical que puede tomar sólo dos valores lógicos: verdadero o falso.

REALIDAD. Es lo que existe en forma objetiva. Lo que existe son las ideas y los objetos relativos a la experiencia, cuyas representaciones son obtenibles por medio de los sentidos y la reflexión.

RENDIMIENTO. Ganancia o utilidad que produce una inversión o negocio.

TASA NOMINAL DE INTERÉS. Es la proporción existente entre la cantidad obtenida por una inversión y el monto de recursos destinados a esa inversión.

TASA REAL DE INTERÉS. Es la tasa de interés que resulta después de ajustar la tasa nominal por el correspondiente índice inflacionario. Se dice que es aquella que resulta después de haber eliminado el efecto de la inflación.

TEOREMA. Proposición sobre un objeto deducido a partir de las definiciones, axiomas u otros teoremas o tesis ya demostrados, mediante los procedimientos apropiados para la rama del saber a la que pertenecen.

TEORÍA. Construcción ideal sobre los objetos de estudio. Explicación que se corresponde con el comportamiento de los hechos.

VERDAD. Es un juicio que consiste en la conformidad de que nuestro pensamiento corresponde con el objeto y sus propiedades.

Bibliografía

Allais, M. " La Economía como Ciencia" en *Metodología y crítica económica*. Recopilación de C. Dagum. Lecturas 26 del FCE . México, 1978.

Ayres, Frank. *Matemáticas financieras*. Editorial McGraw - Hill. México, 1983.

Brugger, Walter. *Diccionario de Filosofía*. Editorial Herder. Barcelona, 1978.

Bunge, M. *La Ciencia, su método y su filosofía*. Siglo veintiuno editores. Buenos Aires, 1979.

Cortina O. Gonzalo. *Prontuario bursátil y financiero*. Editorial Trillas. México, 1986.

Fregoso, A. *Introducción al lenguaje de la matemática*. CEMPAE. México, 1972.

Los elementos del lenguaje de la matemática. Editorial Trillas. México, 1977.

Hasser, N.B. *et al. Análisis matemático, curso introductorio*. Editorial Trillas. México, 1974.

Hempel, Carl G. ''Sobre la naturaleza de la verdad matemática''. *Sigma, El mundo de las matemáticas* vol. 5, Editorial Grijalbo, 1974.

Riggs, J.L. *Ingeniería económica*. Editorial Alfaomega. México,1990.

Russell, B. *Los Principios de la matemática*. Editorial Espasa Calpe. Madrid, 1967.

Strobl, W. *Diccionario Rioduero de matemáticas*. Editorial Rioduero. Madrid, 1977.

Strunk, D.J. *Historia concisa de las matemáticas*. IPN. México, 1980.

Ahorro e inflación
se terminó de imprimir en los talleres de
jason's editores
Tel. 557-57-68
en el mes de noviembre de 1993.
La edición consta de 1,000 ejemplares
más sobrantes para reposición.

Los conocimientos de la matemática obtienen su rasgo de veracidad de acuerdo con reglas deductivas y el grado de certeza de sus conocimientos no se juzga por la posibilidad de su aplicación en el campo de las disciplinas científicas que describen el ámbito de la experiencia humana.

Sin embargo, diversas ciencias, que pertenecen a este último campo del saber, han descubierto que los conocimientos de aquella son imprescindibles para cimentar su desarrollo. El caso particular de la economía es un ejemplo de las amplias posibilidades de la aplicación de la matemática. De esta simbiosis exitosa surge el hecho de que, en la actualidad, la edificación de la teoría económica tiene un amplio fundamento en el uso de los conocimientos de la matemática.

En este texto, se intenta describir algunas de las características que surgen de usar a la matemática como una ciencia aplicada en la solución de un problema del área financiera. Particularmente se aborda la relación entre *Ahorro e Inflación;* es un tema que guarda un problema esencial porque este problema afecta a quienes están en la situación de ahorrar, y el desarrollo que aquí se presenta puede ayudarles en la solución.

PORTADA: Ingrid Knapp